

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

50e jaargang
1974/1975
no 2
oktober

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 26,50. Hiervoor wende men zich tot:

Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.
Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 225,—, $^1/_2$ pag. *f* 120,— en $^1/_4$ pag. *f* 67,50.

Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs (2)

DE JAREN 1920 TOT HEDEN

A. TREFFERS EN E. DE MOOR
Utrecht

'Zwei Umstände schrecken soviele Schüler von der Geometrie ab
a die Abgesondertheit der Geometrie von jeder Wirklichkeit, welche durch manche Lehrer betont wird, und
b das Beweisen von 'evidenten' Sätzen, das gerade am Anfang des Kurses den Weg zum Verständniss versperrt'.

Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa

0. Inleiding

Na het vorige artikel, waarin de periode tot 1924 onder de loep genomen is, zullen we nu de jaren 1920 tot heden beschouwen. We moeten ons daarbij uiteraard beperken.

Dit heeft tot gevolg, dat er weinig konkrete voorbeelden gegeven worden.

De indeling is:
1 de periode 1920–1940
2 de periode 1940–1950
3 de periode 1950–1965
4 de periode 1965–heden

Waar nodig, is er aandacht besteed aan de kwestie van de algemene doelstellingen voor het wiskunde-onderwijs en de didaktische werkvormen.
In het volgende artikel zullen wij nader ingaan op het meetkundeonderwijs voor de basisschool. Dan zullen we meer konkrete voorbeelden in onze beschrijving verwerken.

1. De periode 1920–1940

Hoewel vakpsychologische studies betreffende het matematisch denken of studies, die in het algemeen relevant zijn voor het wiskunde-onderwijs, ontbraken, kunnen we toch zeggen, dat zich enkele belangrijke ontwikkelingen hebben voorgedaan binnen de kring van de toenmalige geïnteresseerden in het onderwijs in de meetkunde.
Enerzijds bestond de gezaghebbende groep van *Dijksterhuis*, *Beth*, *e.a.*, die meende dat een deduktieve inleiding in de meetkunde, waarin van meet af aan het formeel logische bewijs gehanteerd werd op grond van een aantal aksioma's, de aangewezen weg tot meetkunde-onderwijs was.

Anderzijds waren er didaktici als Mevrouw *Ehrenfest-Afanassjewa, Reindersma, Wolda, e.a.*, waarvan ieder op geheel eigen wijze het strenge deduktieve element in het aanvankelijk meetkundeonderwijs afwees en een intuïtieve aanpak voorstond, waarin aanschouwelijke evidentie en konkreet manipuleren met voorwerpen uit de ons omringende wereld een belangrijke rol speelden. Stond bij de eerstgenoemde groep de doceermetode als didaktische werkvorm centraal, zo wees de tweede groep deze van de hand en legde vooral de nadruk op zelfwerkzaamheid, motivatie en emotionele betrokkenheid. Leertheoretische beschouwingen, met uitzondering van een poging van *Turkstra*, ontbraken.

Om de tegenstellingen tussen beide groeperingen iets nader te belichten, onderscheiden we in de tweede groep twee stromingen, zodat we uiteindelijk tot drie stromingen komen, die binnen het aanvankelijk meetkunde-onderwijs bestonden.
We noemen ze:
1 De logisch-deduktieve stroming
2 De empirische stroming
3 De intuïtieve stroming

1.1. De logisch-deduktieve stroming *(Beth, Dijksterhuis, e.a.)*

In een diskussie met Mevrouw *Ehrenfest* zegt *Dijksterhuis* dat kennismaken met de meetkunde het inademen is van een zuivere atmospheer . . . , en niets mag toelaten, dat de zuiverheid van de atmospheer, waarin wordt geademd, de hechtheid van een opbouw, die daar wordt voltrokken, zou kunnen schaden' . . .[1].
Dit werd precies 50 jaar geleden geschreven!
Hiermee is de logisch-deduktieve stroming eigenlijk al gekarakteriseerd. Men gaat er van uit, dat een leerling in het middelbaar onderwijs vrij snel aan de eisen van een deduktieve leergang moet kunnen voldoen, met name de wetenschappelijk verantwoorde leerstofordening van de euclidische meetkunde. De leraar heeft in het onderwijsgebeuren een leidende rol. Hij is veelal korrigerend en docerend bezig. De leerling mag kijken en luisteren, maar móet denken. De slechte resultaten van de leerlingen worden afgewenteld op een slecht selektiebeleid.
Deze groep gaf binnen het onderwijs de toon aan, al deed men bij de praktische uitwerking nogal eens water in de wijn. Soms zelfs zoveel, dat de werkwijze sterk deed denken aan de vormleerachtige aanpak, zoals we die in het vorige artikel beschreven. Het werk van *Reindersma* is in het vorige artikel uitgebreid aan de orde geweest. Omdat aan zijn werk de empirische stroming het best wordt gedemonstreerd, geven we hier nog een korte samenvatting.

1.2. De empirische stroming *(Reindersma)*

Er wordt gebruik gemaakt van de traditionele meetkundeleerstof. De op-

bouw vindt plaats in de vraagstukken, die uiteindelijk uitmondt in de logisch-deduktieve stroming. De inleiding echter geschiedt met schatten, meten, vouwen, knippen, draaien, vloeien (lijnspiegeling) en konstrueren. Het symmetriebegrip speelt een belangrijke rol, terwijl kongruentie vrijwel niet gebruikt wordt. Aanhangers van de empirische stroming stellen, dat 12-jarigen in het algemeen niet rijp zijn voor een logisch-deduktief georiënteerd aanvangsonderwijs. Zij menen, dat er nog veel aan de wiskunde-didaktiek te verbeteren valt. Men ziet de ontwikkeling van het logische denken als belangrijkste doel, maar ook de praktische waarden van de meetkunde mag niet onderschat worden. Daarom dient een empirische propedeuse vooraf te gaan aan de aksiomatische behandeling. Het principe 'learning by doing' staat in deze opvatting centraal.

1.3. De intuïtieve stroming *(Ehrenfest-Afanassjewa)*

De inzichten van Mevrouw *Ehrenfest* nemen binnen deze periode een geheel aparte plaats in. De logika, die in de wiskunde gehanteerd wordt, dient – volgens Mevrouw *Ehrenfest* – niet alleen de formele kant te raken. Juist het proces dat voorafgaat aan het zuiver formeel redeneren, acht zij van groot belang. Zij bedoelt hiermee: het aanvoelen van: 'in die richting gaat de oplossing van het probleem', het 'formuleren van de oplossing' en het 'zien van het bewijs'. Zij noemt deze voorafgaande fase: 'intuïtie', die uit zintuigelijke waarnemingen of als resultaten van voorgaande 'logische werkzaamheden' tot stand is gekomen. Zij onderscheidt bij het verwerven van inzicht twee stappen:

1 Het zien van een zekere 'trek' in het beeld en het ordenen van die trekken zonder zich er rekenschap van te geven (intuïtieve strukturering).
2 De bewustwording van het intuïtieve beeld, het ordenen van datgene wat het intuïtieve beeld voorstelt, het opvullen van leemtes, het trachten op te heffen van tegenstrijdigheden. Dit proces van 'ekspliciete analyse' van het intuïtieve beeld noemt zij 'logische werkzaamheid'.[2]

Soms nu zal deze intuïtieve kennis door opvoeding en/of milieu aanwezig zijn, maar het leven heeft echter aan het ene kind een veel grotere voorraad intuïtief materiaal verschaft, dat bruikbaar is voor het meetkunde-onderwijs, dan aan het andere. Om nu leerlingen op eenzelfde aanvangsnivo te brengen, wordt aan de 'minderbedeelden' eerst een propedeuse aangereikt. Deze wordt gegeven aan de hand van opdrachten, die bijna alle direkt met de ons omringende ruimte en/of het leven van alledag te maken hebben: schatten en meten van hoeken en lengten; afstand bepalen tussen twee punten op bol, kegel en cylinder; perspektief en schaduwproblemen; doorsnijding van ruimtefiguren en topologische kleurproblemen.[3]
Na deze propedeutische introduktie volgt de systematische inleiding, die zich slechts van de traditionele inleiding onderscheidt door:

a 'Een stelling wordt alleen dan bewezen wanneer ze minstens voor één leerling niet evident is; de evidente stellingen worden uitdrukkelijk als (voorlopige) aksioma's aangenomen.

b Het vaststellen, formuleren en bewijzen der stellingen geschiedt – wel niet zonder leiding van de leraar – maar toch met verregaande medewerking van de leerlingen zelf.
c De inhoud van de kursus moet zo beknopt mogelijk zijn'.[4]

Tenslotte volgt een aksiomatische herziening van het geleerde. Mevrouw *Ehrenfest* gaat er dus van uit, dat kinderen in het algemeen niet in staat zijn een systematische inleiding in de meetkunde te volgen, dat de 'logische werkzaamheid' leeg is als er niet een bepaalde intuïtieve fase aan voorafgegaan is en dat de leerlingen eerst op een zelfde nivo gebracht dienen te worden ('propedeuse voor de zwakken').
Het uiteindelijke doel van deze stroming is ook inzicht te verschaffen in een deduktieve wetenschap, doch in tegenstelling met *Reindersma* wordt een rijkere inleiding gegeven binnen een ruimer leerstofgebied. Mevrouw *Ehrenfest* meent, dat met het meetkundeonderwijs ook het formele doel van het wiskundeonderwijs gediend kan worden.

1.4. Onderlinge kritiek

Richten we ons tot slot op de onderlinge kritiek, die deze stromingen op elkaar hadden.

Dijksterhuis (logisch-deduktieve stroming) richtte zich fel tegen de stereometrisch georiënteerde opzet van de propedeutische kursus van Mevrouw *Ehrenfest-Afanassjewa* (intuïtieve stroming), omdat deze aanpak niet noodzakelijk zou zijn voor een zinvolle behandeling van de planimetrie en zelfs meer moeilijkheden voor de leerlingen zou opleveren dan de zoveel mogelijke logische opbouw van de meetkunde op evidente grondslagen. Tegen de systematische kursus uitte *Dijksterhuis* het bezwaar, dat de vanzelfsprekende stellingen niet bewezen werden, maar als 'voorlopige' aksioma's ingevoerd werden en hij betitelde een dergelijke leergang als een aanslag op de zuiverheid en eerlijkheid van het matematische denken. In een voetnoot bij het artikel 'Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?' schrijft hij echter:

'Dat de logische onaantastbaarheid der elementaire meetkunde bij scherpere kritiek niet volkomen blijkt te zijn, kan buiten beschouwing blijven. De leerlingen plegen de gebruikte redeneringen als dwingend te voelen, zelfs daar, waar, zoals bij het opnemen en weer neerleggen van driehoeken in de kongruentiebewijzen, de logische strengheid in werkelijkheid zoek is'.[5]

Dijksterhuis neemt hier dus als kriterium voor eksaktheid de door de leerling als eksakt gevoelde redenering en daarmee stelt hij zich op het standpunt dat hij bij *Ehrenfest-Afanassjewa* bestrijdt.
Het is echter wel duidelijk, dat zich hier juist de verschillen toespitsen op de kern van de zaak, namelijk een verschillende beoordeling van de uitgangssituatie.
De psychologische argumenten van *Ehrenfest-Afanassjewa* maken weinig in-

druk op *Dijksterhuis*, omdat haar opvattingen niet steunen op inzichten van de wetenschappelijke psychologie, maar ontspruiten aan een subjektief psychologische overtuiging, waartegenover *Dijksterhuis* zijn psychologische opvattingen stelt. De felheid van de diskussie nam in de dertiger jaren zodanig af, dat men kon spreken van een vreedzame koëksistentie tussen de verschillende opponenten.
Men aanvaardde een pluriformiteit van onderwijsmetoden en men ging zich richten op gemeenschappelijke doelstellingen.
H. E. J. Beth schreef dan ook in Euclides X:

'De ijverigste verdediger van de propaedeutische kursus zal wel na enkele maanden zoo ver zijn, dat hij orde gaat scheppen in de verworven kennis; de meest overtuigende propagandist der exactheid laat in de eerste tijd veel figuren teekenen en daarin eigenschappen met het oog ontdekken'.[6]

Ehrenfest-Afanassjewa veroordeelde, zoals we reeds eerder vermeld hebben, de syntetische opvatting van meetkunde-onderwijs en stelde daartegenover de analyse der intuïtie, als een noodzakelijke voorwaarde om tot inzicht te komen in de meetkunde als deduktieve wetenschap. De ontwikkeling van een meetkundig begrippenstelsel, vergroting van het ruimtelijk voorstellingsvermogen en het beleven van de noodzaak van eksakte formulering en bewijs, moeten (uitdrukkelijk) nagestreefd worden in een propedeutische kursus.
Reindersma legde in zijn bestrijding van de logisch-deduktieve inleiding vooral de nadruk op de noodzaak om het gehele denkproces te ervaren, wat bij het traditionele aanvangsonderwijs niet mogelijk zou zijn vanwege een te sterke nadruk op het eindresultaat van andermans denken.
De kritiek op de empirische stroming bevat twee wezenlijke punten:

1 De propedeutische introduktie geeft geen verrijking van de intuïtieve inzichten.
2 De konsentrische leergang van *Reindersma* heeft het bezwaar, dat de moeilijkheden die inherent zijn aan de vermenging van ruimteleer en aksiomatika vergroot worden, omdat hetgeen eerst als maatstaf voor juistheid diende – het inzien of de empirische verifikatie – later niet meer gebruikt mag worden met betrekking tot gelijksoortige leerstof.

1.5. Doelstellingen

Er werd gedurende de periode 1920–1940 in het algemeen sterke nadruk gelegd op de formele vorming. Eksakt taalgebruik, deduktief redeneren en logisch denken worden welhaast algemeen als doel gesteld, terwijl daarnaast nog gesproken werd over etische, estetische, kultuurhistorische en sociale waarden, die door het wiskunde-onderwijs gediend kunnen worden (onder bepaalde voorwaarden). De humanisering en de geestesvorming kregen 'n sterk aksent in de denkbeelden van de ideële bovenbouw. Het praktische nut en het maatschappelijk belang echter werden vrijwel onvermeld gelaten, zodat we konden spreken van wiskunde-onderwijs met een sterk anti-utilitaristisch karakter,

wat nog eens onderstreept werd door de opvattingen die men in het algemeen huldigde ten aanzien van het mechanika-onderwijs, waarin de konfrontatie met de werkelijkheid gemeden werd en de aksioma's met de daaruit getrokken konklusies nauwelijks op hun fysische bruikbaarheid onderzocht werden.

1.6. Leerboeken

Het is van belang te vermelden, dat de meest suksesvolle leerboeken – afgemeten aan het aantal herdrukken in de periode 1920–1940 – dicht rond het gemiddelde leerboek der logisch-deduktieve richting gegroepeerd dienen te worden, waarbij we moeten bedenken dat de leerboeken voor het U.L.O. in het algemeen een meer vormleerachtige benadering kiezen.
We kunnen het volgende beeld over het gemiddelde leerboek der logisch-deduktieve richting ontwerpen:

De leerstof, die in het algemeen in de eerste klas behandeld werd, is op de volgende wijze geordend:
1 Inleiding, lijnen en hoeken.
2 Evenwijdige lijnen.
3 Over driehoeken.
4 Over kongruente driehoeken.
5 Over meetkundige plaatsen, waaronder de cirkel.
6 Konstrukties: de grondkonstrukties en het konstrueren van driehoeken (en later vierhoeken).
7 De bijzondere vierhoeken: parallellogram, rechthoek, ruit, vierkant.
8 De veelhoeken.

Na het vooropstellen van objekt en werkwijze, volgt er in de eerste hoofdstukken vrijwel direkt een praktische uitwerking van deze werkwijze: stellingen en hun bewijzen verschijnen in een stuk teorie, dat duidelijk apart van de toepassingen staat.
De stelling wordt allereerst geformuleerd, daarna 'vertaald' in het gegeven en te bewijzen, en het bewijs volgt in pasklare vorm. Er worden drie aksioma's genoemd in de eerste hoofdstukken:

1e Heeft 'n rechte twee punten met een plat vlak gemeen, dan ligt hij er geheel in.
2e Een rechte is door twee punten bepaald.
3e Door 'n punt buiten een rechte lijn kan men slechts één rechte evenwijdig met die lijn trekken.

Het merendeel der eigenschappen wordt in de teorie behandeld, slechts een enkele stelling wordt in de vraagstukken – dik gedrukt vermeld. In het eerste hoofdstuk – over lijnen en hoeken – komen de volgende eigenschappen – in teorie of toepassingen – aan de orde:

1e Twee gestrekte hoeken zijn gelijk.

2e Twee overstaande hoeken zijn gelijk.
3e Twee rechte hoeken zijn gelijk.
4e Als twee hoeken gelijk zijn, dan zijn hun supplementen (komplementen) ook gelijk.
5e De bissektrices van twee nevenhoeken staan loodrecht op elkaar.
6e De bissektrices van twee overstaande hoeken vormen een gestrekte hoek.

Op basis van drie aksioma's en een groot aantal min of meer eksakt gedefinieerde begrippen bewijst men in het eerste leerjaar een vijftigtal stellingen. Daarnaast heeft men de beschikking over tweehonderdvijftig vraagstukken, waarvan er ongeveer 40 in de eerste twee hoofdstukken staan. Aanvankelijk ligt het aksent bij de toepassingen op het berekenen (50%); bewijssommen (30%) en teorievragen (15%) zijn ook in ruime mate aanwezig, maar vraagstukken waarin het doel van tekenen en meten in zichzelf ligt, zijn vrijwel niet voorhanden. Passer, tekendriehoek en gradenboog worden niet gehanteerd.

De *meer aksiomatische* aanpak (*Schogt, Ouwehand en Ruben*) onderscheidt zich kwantitatief van het 'gemiddelde' leerboek: er is sprake van meer aksioma's, meer stellingen, meer onderwerpen, meer bewijssommen in de eerste hoofdstukken, een verder terugdringen van de aanschouwelijke evidentie, en meer eksakte begripsomschrijvingen. Hoewel er ook koncessies gedaan worden ten aanzien van de aanschouwelijkheid, gaat men niet zo ver, dat men al het vanzelfsprekende verzwijgt. Een voorbeeld uit het boek van *Schogt*:

'Helften van congruente lijnstukken zijn congruent.
Onderstelde: $AB = A'B'$, PQ is de helft van AB, $P'Q'$ de helft van $A'B'$.
Gestelde $PQ = P'Q'$.
Bewijs: Er zijn drie gevallen denkbaar: $PQ > P'Q'$, $P'Q' > PQ$ en $PQ = P'Q'$.
Was $PQ > P'Q'$, dan was volgens stelling 7 $PQ+PQ > P'Q'+P'Q'$ en daarna $P'Q'+P'Q' = A'B'$, volgens stelling 4 $AB > A'B'$. Dit is in strijd met het onderstelde, dat $AB = A'B'$, dus kan het geval, dat $PQ > P'Q'$ is, zich niet voordoen. Evenzo bewijst men, dat $P'Q' > PQ$ zich niet kan voordoen, omdat daaruit zou volgen, dat $A'B' > AB$, hetgeen ook in strijd is met het onderstelde. Dus moet $PQ = P'Q'$ zijn.
Hiermede is de stelling bewezen.'[7]

En juist in de verzwijging – het minder – ligt het kenmerk van de *meer vormleerachtige* aanpak. Terwijl men in het gemiddelde leerboek moeilijk z'n 'draai' kan vinden in het bewijs van evenwijdigheid en overeenkomstige hoeken, 'schuift' men bij de vormleerachtige benadering de moeilijkheid van het bewijs opzij:

'Verschuift $\angle A_1$ tot punt A op punt B valt.
AB komt dan op BC te liggen. Omdat de lijnen m en l evenwijdig zijn zal m_1 op l_1 vallen. Het hoekpunt A komt in B en de benen van $\angle A_1$ komen te liggen op de benen van $\angle B_1$, dus $\angle A_1 = \angle B_1$.'[8]
Wij vinden dus hier een typisch kenmerk van de vormleer terug, namelijk het verplaatsen van figuren en het gebruikmaken van aanschouwelijke evidenties.

Het aksent bij de vraagstukken ligt in de eerste twee hoofdstukken vooral op het berekenen (50%) en de teorievragen (30%). Er wordt dus niet alleen over het vormaspekt gesproken, maar vooral het grootte-aspekt komt in de vraagstukken tot uitdrukking. In plaats van de nadruk op het bewijzen (aksiomatische richting) is er hier sprake van een aksent op berekensommen.

In de vormleerachtige aanpak is er dus ten opzichte van het gemiddelde leerboek sprake van een 'minder'. Er komen minder onderwerpen aan de orde, er worden minder (of geen) aksioma's gebruikt, minder bewijssommen gevraagd. Het berekenen neemt een belangrijke plaats in, de aanschouwelijke evidentie wordt dankbaar gebruikt om het indirekte bewijs te mijden, maar ook nu is er voor hanteren van tekendriehoek, passer en gradenboog vrijwel geen plaats in het leerboek ingeruimd. De stellingen zijn vrijwel dezelfde als die van het gemiddelde leerboek.

Vervolgens is er een aantal leerboeken, die het *konstruktieve element* wat naar voren schuiven (*Apeldoorn en Heimel, Velthoven, Wijdenes e.a.*).
Het tekenen en konstrueren wordt vooral aangeprezen, omdat het kind dan aktief bezig is – wat dat dan ook betekenen mag – of omdat de moeilijkheden die het konstrueren met zich meebrengt bij een geleidelijke behandeling beter opgelost kunnen worden. De grondkonstrukties worden vooruitgeschoven om de grondkonstrukties beter te leren (een metodisch doel), maar niet omdat men dit konstrueren als middel gebruikt (met eventueel andere empirische middelen) om de hele aanpak van het meetkunde-onderwijs te veranderen en om het konstrueren voor beter begrip van andere onderwerpen, zoals bijvoorbeeld kongruentie, te laten dienen.

Tenslotte zijn er dan nog de leerboeken van *Bijpost en Timmer*, en van *Muller*, die ieder op hun eigen wijze een *syntese* tussen de eksperimenteel-konstruktieve en de logisch-deduktieve benaderingswijze trachten te realiseren.

Samenvattend kunnen we over de leerboeken uit de periode 1920–1940 het volgende opmerken:
In de leerboeken was binnen het kader van de kwasi-deduktieve opbouw der traditionele leerstof een skala van mogelijkheden gerealiseerd: vormleerachtige, eksperimentele en deduktieve aspekten werden verschillend geaksentueerd. Er bleken leerboeken te zijn, die niet of slechts gedeeltelijk in het gezichtsveld van de vakstructuur lagen; deze kenmerkten zich vooral door hun afwijkende inhoud, die moest dienen om de 'geleefde' matematische ervaringen te ekspliciteren of te verrijken.
Binnen het geheel der leerboeken bleken verschillende inleidingsprocedures gebruikt te worden, maar de systematische inleiding, die zich kenmerkt door een kontinu verloop naar een meer eksakte behandeling, bleek in het algemeen geprefereerd te worden boven de propedeutische introduktie, waarin een diskontinue overgang naar een aksiomatische opzet plaatsvindt.
Hoewel het leerplan ruimte liet voor een geheel eigen aanpak wat betreft de leerstofordening, was de leerplankommissie – *Beth, Dijksterhuis e.a.* – van mening dat een deduktieve inleiding, waarin op basis van een breed aksioma-

stelsel het bewijs als overtuigingsmiddel gehanteerd wordt, aan te bevelen was boven een empirische of intuïtieve introduktie. Een streng aksiomatische inleiding – in klassieke of moderne zin – werd didaktisch niet verantwoord geacht en de klassieke leerstofopbouw kon doorbroken worden, indien dit in verband met het epistemisch beginsel wenselijk geacht werd (de psychologie zou hieromtrent uitsluitsel moeten geven). In het algemeen kenmerkte zich de periode 1920–1940 door perfektionering van de traditionele leerstofordening: er was een aanzet tot besnoeiing van de onoverzienbare vraagstukken – uitgroei en een beperking van het stellingenveld merkbaar, die na de tweede wereldoorlog – mede door het werk van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. – voltooid werd. Het probleem van de leerstofkeuze werd uitsluitend door leraren opgelost, het schrijven van een leerboek was veelal een energieke studeerkamerprestatie gestoeld op een respektabele onderwijservaring.

1.7. Didaktische werkvormen e.d.

Over de didaktische werkvormen merken we allereerst op, dat het niet mogelijk is om een indruk te geven van wat er zoal in de schoolklas plaatsvindt, maar dat het ook hier weer gaat om de didaktische werkvormen, die door de ideële bovenbouw in de matematisch-didaktische literatuur aangeprezen worden en in leerplan en schoolboek een ruimte van toepassingsmogelijkheden krijgen toegewezen. De periode 1920–1940 kan in dit opzicht slechts negatief gekarakteriseerd worden: er ontbreken in het algemeen beschouwingen over didaktische werkvormen bij de gezaghebbende groeperingen. Daaruit kunnen we echter niet zonder meer konkluderen, dat men de les in een bepaald star schema indeelde volgens de 'Formalstufen' van de Herbartiaanse school, dat men geen oog had voor de zelfwerkzaamheid van de leerling en dat men de leerling zonder meer voor een probleem stelde en daarmee de motivatie als belangrijke leerfaktor uitschakelde. Men kan echter wel stellen, dat er vanuit de matematisch-didaktische literatuur en het schoolboek in het algemeen geen steun gegeven werd (voorzichtig uitgedrukt!) om de keten Vorbereitung – Darbietung – Verknüpfung – Zusammenfassung – Anwendung te doorbreken. Er was echter wel een groep (*Ehrenfest-Afanassjewa*, *Reindersma*, *Wolda*, *e.a.*), die de eenzijdige doceermetode uitdrukkelijk afwees en het aksent legde op motivatie, emotionele betrokkenheid, zelfwerkzaamheid, aanschouwelijkheid, nabijheid e.d., maar de nadruk in dergelijke betogen lag dan – begrijpelijk – veel meer op de rechtvaardiging van de inhoudelijke zijde van de denkbeelden, dan op de technische kant van de zelfwerkzaamheidsvormen. Zo bleef de kwestie van de didaktische werkvormen een zaak van de individuele leraar, die er binnen de persoonlijke speelruimte die hem gegeven werd een kreatieve oplossing voor moest vinden, hoewel de onderwijsmiddelen weinig mogelijkheden boden.
Ook ten aanzien van de leerteoretische aspekten wordt de periode 1920–1940 het beste gekarakteriseerd door de aanduiding van 'het ontbreken'.
De beschouwingen van *Turkstra* vormen hierop een uitzondering, maar met alle waardering, die men voor deze eerste poging om leerpsychologische beschouwingen in de didaktiek van het wiskunde-onderwijs te betrekken kan

hebben, moet men echter ook stellen dat deze beschouwingen te vaag en algemeen gehouden waren.[9]
De evaluatie – het cijfers geven voor proefwerken – is in matematische kring geen onderwerp van een diskussie geweest, die aanleiding gaf tot didaktische probleemstellingen (als men tenminste het selektieve element in dit verband meer als een maatschappelijke eis ziet).

2. De periode 1940–1950

Overzien we de periode '20–'40 nog eens dan kan de diskussie, die toen gevoerd werd samengevat worden tot de vraag:
'Wat kan een 12-jarige leren?'
Er bestond betreffende deze problematiek een veelheid van verschillende gezichtspunten, die stoelen op praktisch-intuïtieve ervaringen. Het liefst zou men de was de deur uit te doen en een andere instantie dan de wiskunde-onderwijzer laten beslissen. Men verwachtte nogal wat van de leer- en ontwikkelingspsychologie, die echter nog weinig te bieden bleek te hebben.
Wel meent *Mooy*: 'Het is evenwel volstrekt niet nodig ons bij deze toestand neer te leggen, want al zijn inderdaad de tot nu toe gebruikte methoden (enquêtes en correlatie-onderzoek) ontoereikend geweest, dan wil dat niet zeggen dat er geen andere methoden zijn en dat we dus moeten berusten in de toestand zoals die nu is en alleen kunnen afgaan op onze eigen ervaring.[10]
Mooy merkt met betrekking tot het al dan niet bewijzen van stellingen op: 'Welke van deze nu wel en welke niet bewezen moeten worden, kan niet door de wiskunde, maar moet door de psychologie in verband met het intellect van de leerlingen uitgemaakt worden'.[11]

Ook *Wielenga* wijst op de noodzaak om feiten van psychologische onderzoekingen mee te laten spreken in de leerstofselektie en ordening. Zonder dat men echter de beschikking heeft over deze psychologische feiten is er in de veertiger jaren een toenemende eenstemmigheid te konstateren over de basisprincipes van het aanvangsonderwijs in de meetkunde, waarmee uiteraard niet gezegd is, dat deze ideeën al direkt hun neerslag kregen in de onderwijspraktijk. In publikaties van *Mooy, Wielenga, Vredenduin, Heijting, Van Hiele en Timmer* komen enkele van deze basisprincipes naar voren:

· Leerlingen van 12 jaar zijn in het algemeen nog niet rijp voor meetkundeonderwijs op traditionele ('deduktieve') grondslag.
· Er dient een aanschouwelijke basis gelegd te zijn, voordat het geometrisch gebouw opgetrokken kan worden.
· Het leggen van een grondslag kan gebeuren door konstrueren en eksperimenteren.
· Wiskunde-onderwijs dient in nauw verband gebracht te worden met andere vakken.
· Bewegingen (transformaties) dienen een grotere rol te spelen in het meetkunde-onderwijs.

Naast deze grotere eenstemmigheid over het aanvankelijk meetkundeonderwijs

beluisteren we een toenemende kritiek op het werk van de kommissie *Beth-Dijksterhuis*, die onder de naam 'epistemisch' een wetenschappelijker benadering van het totale wiskunde-onderwijs voor de H.B.S.-B-scholen nastreefde. Het staat te ver van de reële onderwijspraktijk, de uitvoering is niet alleen onwenselijk, maar onmogelijk en het is onbegrijpelijk dat de ervaringen over het bevattingsvermogen van leerlingen van 12 tot 18 jaar zo kunnen verschillen; kortom, het leerplan voor het onderwijs in de wiskunde aan de H.B.S.-B is zowel naar omvang als inhoud onuitvoerbaar, zo bekritiseren *Bremekamp, Bottema en Streefkerk* het leerplan. Voege men bij deze algemene kritiek de veranderde denkbeelden over het meetkunde-onderwijs, dan hebben we een rijke voedingsbodem voor de groei van nieuwe inzichten omtrent leerstofselektie en ordening. Het zou echter nog enkele jaren duren voordat iets van deze denkbeelden geëffektueerd zou worden. Dit geschiedde in het ontwerpleerplan van de WIMECOS-kommissie in 1954, waarop wij nog terugkomen. Kenmerkend voor deze periode is wel het ontbreken van een scherpe diskussie: de opvattingen over leren en onderwijzen blijven ongewijzigd.

3. De periode 1950–1965

3.0. Inleiding

Deze periode wordt gekenmerkt door het beeld van een levendige didaktische aktiviteit, die belangrijke veranderingen bewerkstelligde. We doelen hierbij niet in de eerste plaats op het gewijzigde leerplan (1954) als wel op de kritische belangstelling voor de ontwikkelingspsychologie (*Piaget*), de veranderde houding ten aanzien van didaktische werkvormen (*Boermeester*), de opkomst van de transformatie-meetkunde (*De Groot, Troelstra*) en vooral op het werk van *Van Hiele en Van Hiele-Geldof.* Verwachtte men in de vorige periode nog veel van de psychologie, nu wordt het onderzoek door de deskundige leraar zelf ter hand genomen (*Boermeester, Van Hiele, Van Hiele-Geldof*) of in samenwerking met psychologen (*De Groot, e.a.*).
Naast de klinische metode uit de ontwikkelingspsychologie wordt nu de didaktische metode uit de onderwijs praktijk als nieuwe onderzoeksmetode gesteld.

3.1. Doelstellingen

De diskussie rond de vraag: 'Kan het wiskunde-onderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?' tussen Mevrouw *Ehrenfest* en *Freudenthal* bleek geen eenstemmigheid te kunnen uitlokken.[12] Overeenstemming tussen de opponenten bestond er ten aanzien van de brede benadering van wiskunde-onderwijs vanuit de analyse van het matematiseren en in de wijze waarop goede denk- en leergewoonten in de wiskunde gestimuleerd kunnen worden, maar het breekpunt bleek te liggen bij de 'eenvoud' van de wiskunde als voorwaarde voor 'transfer'. Deze eenvoud was voor *Ehrenfest-Afanassjewa* aanleiding het abstraherend en kritisch vermogen juist in het wiskunde-onderwijs

te beoefenen om het van daaruit te laten uitstralen op andere kennisgebieden waar deze denkgewoonten ook van groot nut zullen zijn. *Freudenthal* daarentegen was van mening, dat deze 'eenvoud' van de wiskunde juist de grote belemmering voor overdracht is op gebieden buiten de wiskunde. Deze zienswijze van *Freudenthal* wordt vanuit de psychologisch-didaktische kant ondersteund en zelfs versterkt door de opvattingen van *Langeveld*, die verschillende transfer-kringen onderscheidt, waartussen onderling een negatieve transfer bestaat. De opvatting van *Ehrenfest-Afanassjewa* vindt z'n psychologisch-didaktische komplement bij *Van Hiele* en *Van Hiele-Geldof*, die mede op grond van Gestaltpsychologische en leerpsychologische overwegingen tot de mogelijkheid van 'totale transfer' komen, mits het onderwijs in de wiskunde gericht is op het proces van matematiseren, waarbij men ontdekt wat wiskunde is door er van buiten af in te dringen en aldus konkrete niet-wiskundige problemen om te vormen tot wiskundige. Het aspekt van de vormende waarde als motivering voor wiskunde-onderwijs verdwijnt onder invloed van deze diskussie uit het leerplan. *Freudenthal* schreef: 'Ik vrees, dat men op drijfzand bouwt, wanneer men de uren, die het een of ander schoolvak opeist, wil rechtvaardigen met een beroep op de denkoefeningen, waaraan die tijd zou worden besteed'.[13]
Met het verdwijnen van het argument van de vormende waarde van het wiskunde-onderwijs, komen ook de eerste publikaties over operationaliseerbare doelstellingen los (*Wielenga*, *Van Dantzig*, *De Groot*).

3.2. De leerboeken

Bekijken we eens in het bijzonder de kriteria, die voor het onderwijs in de meetkunde golden, dan lezen we in het rapport van de WIMECOS-leerplankommissie (1954), dat een systematische inleiding niet geschikt meer lijkt.
'Naar de mening van de Kommissie zullen de resultaten van het aanvangsonderwijs verbeteren, als niet te spoedig wordt overgegaan tot de opbouw van een logisch systeem. De bedoeling van een dergelijke opbouw met behulp van definities, aksioma's en stellingen moet door de leerlingen worden ingezien alvorens het zin heeft deze te laten bestuderen. Hiertoe dient de meetkundekursus met een intuïtieve inleiding aan te vangen. Deze inleiding hoeft niet van lange duur te zijn en kan geleidelijk overgaan in het logisch-systematisch gedeelte'.[14]
Hiermee wordt dan weer geheel aan de beleefdheid der schoolboekenauteurs overgelaten, waarvoor gekozen zal worden. Een korte of een ruime intuïtieve inleiding.
Na de intuïtieve inleiding, waarin veel gemeten, gekonstrueerd en getekend dient te worden, volgt de systematische kursus.

In de vijftiger jaren beginnen de meeste van de ongeveer zeventig leerboeken van het voortgezet onderwijs dan ook met een propedeuse waarvan tijdsduur en inhoud nogal uiteenlopen. Enkele verschilpunten: een duur van enkele weken tegenover een duur van meer dan een jaar; een analytisch-stereometrisch georiënteerde leergang tegenover een syntetisch-planimetrisch gerichte aanpak: de nadruk op aanschouwelijke evidentie tegenover de nadruk

op het eksperiment; het aksent op probleemoplossing tegenover de nadruk op ruimtelijke strukturering. Deze veelvormigheid komt ook tot uitdrukking in het 'Report on Methods of initiation into Geometry' en komt overeen met de grondgedachte, dat de leraar de nodige vrijheid dient te behouden in de keuze van zijn didaktische middelen.[15] Een inleidende meetkunde behoorde ook tot een dergelijke keuze en het lijkt zelfs gerechtvaardigd te stellen, dat een dergelijke keuze – in tegenstelling tot de dertiger jaren – een gebruikelijke gang van zaken begon te worden. Het zojuist genoemde 'Report...' bevat bijdragen van *Van Albada, Boermeester, Bunt, Ehrenfest-Afanassjewa, Ernst, Geursen, Van Hiele-Geldof, Van Hiele, Krooshof, Van der Neut, Timmer, Turkstra en Vredenduin*, en is uitgegeven onder redaktie van *Freudenthal*, die het betreurt dat de opvattingen van *Bos* en *Lepoeter* hierin ontbreken.
Het geheel weerspiegelt de bonte verscheidenheid van uitwerkingen die geen eenvoudige klassifikatie in vooroorlogse kategorieën meer mogelijk maakt. De logisch-deduktieve stroming is uiteengewaaierd in tal van genuanceerde inleidingen, de empirische aanpak wordt geïntegreerd in deze inleidingen, de intuïtieve stroming vindt zijn voortzetting en verdieping in het werk van de *Van Hiele's* en van *Van Albada*, en de transformatie-meetkunde – waarvoor men in de dertiger jaren ook reeds belangstelling had – wordt in 1962 in een schoolboek gekonkretiseerd.

3.3. Onderzoek over meetkunde-onderwijs

In de vijftiger jaren zijn er drie belangrijke onderzoeken gedaan:

1. Een onderzoek van *Boermeester*, waarin een evaluatie van werkvormen vanuit de praktisch-pedagogische hoek plaatsvindt[16]
2. Researchwerk van *De Groot*, waarin een evaluatie van leerstofvormen geschiedt vanuit metodologisch-psychologisch gezichtspunt[17]
3. Een eksperiment van *Van Hiele-Geldof*, waarbij het fenomologisch-didaktische standpunt tot uitdrukking komt.[18]

Het eerste onderzoek heeft een beperkt onderzoeksgebied en beoogt een aanbeveling te zijn voor het toepassen van de leergespreksmetode. Het gebruikte onderzoeksinstrumentarium en de gevoegde onderzoeksprocedure vertonen overeenkomst met de toetshandelingen in de alledaagse schoolpraktijk en bevatten fundamentele feilen. Toch is deze bijdrage, vooral door de weergave van de lesprotokollen, van belang als vernieuwingssteentje. Het kan echter niet als een belangrijk onderzoeksbroodje verkocht worden.
Bij het tweede onderzoek liggen de zaken juist omgekeerd. Men wil een nieuwe 'metode' – bewegingsmeetkunde – evalueren en daarbij tegelijkertijd een model aanreiken voor zo'n evaluatie. De gebruikte onderzoekmiddelen zijn eksakt, maar belangrijke didaktische vóóronderstellingen zijn ongemerkt ingepast in de 'eksperimentele variabele', zodat de bruikbaarheid voor de onderwijspraktijk gering is. De metodologische opbrengst is interessant genoeg om een diepgaande diskussie uit te lokken, wat overigens niet gebeurd is.
Zoals het eerste onderzoek voortkomt uit een bezinning op de onderwijs-

praktijk en het tweede onderzoek resulteert in onderzoekstechnische bemoeiingen, zo blijkt het derde eksperiment vooral ten grondslag te liggen aan een nieuwe doordenking van de didaktiek. Er wordt in dit onderzoek een verantwoording gegeven van de uitgangspunten, een opsomming van de doelstellingen van het aanvankelijke meetkunde-onderwijs en een beschrijving van het onderwijs-leerproces door middel van lesprotokollen. Het geheel wordt geïnterpreteerd vanuit de teorie over de denknivo's van *Van Hiele.* We schetsen nu kort de leergang, die mevrouw *Van Hiele* in haar onderzoek gebruikte en wijzen erop, dat deze aktiviteiten, met die van *Van Albada,* als het eindpunt te beschouwen zijn van de ontwikkelingen, die vanaf de eerste wereldoorlog hebben plaatsgevonden. Of zo men wil: het hoogtepunt.
Om bij het kinderlijke denken te kunnen aansluiten, wordt in een empirisch gerichte aanpak van ongeveer 4 maanden gewerkt. De kinderen maken zelf een kubus, leren daaraan allerlei begrippen kennen, lossen telproblemen op, meten de zijvlaks- en lichaamsdiagonalen, etc. Het feit, dat de kinderen de kubus zelf gemaakt hebben, verankert allerlei grondbegrippen. Daarna is er aandacht voor symmetrische figuren, de ruit wordt uitgebreid behandeld in verband met de grondkonstrukties, terwijl ook nog aandacht aan andere ruimtefiguren (achtvlak, piramide) wordt besteed. Dit alles volgens de didaktische grondstelling: 'Men moet de kinderen denkend laten doen met hanteerbaar materiaal als hulpmiddel'. ( )
Hierna volgt het onderwerp 'tegelvloeren' om visuele meetkundige figuren bij de kinderen te vormen. De bedoeling is, dat men zich niet meer tevreden stelt met louter empirisch gevonden waarheden, doch dat langzamerhand een meer logisch redeneren hiervoor de plaats inneemt. Het bewijs van een stelling als 'de drie hoeken van een driehoek zijn samen 180°' wordt door de kinderen zelf gevonden, waarbij de hulplijn zich op natuurlijke wijze aanbiedt. Er wordt in dit stadium en verder gedurende het gehele eerste jaar echter nog geen systematische leerstofordening aangeboden. De kursus wordt afgesloten met een zestal lessen, welke weer aanvangen met een kubusmodel, waaruit dan het ruitentwaalfvlak wordt gekonstrueerd door de zes piramides, die de kubus opvullen als het ware naar buiten te klappen. De samenhang met de kubus (ligging en inhoud) komt ter sprake en de kinderen maken zelf een netwerk van het ruitentwaalfvlak. Daarna dringt zich de vraag op welke regelmatige lichamen te maken zijn. Uiteindelijk vinden de kinderen langs empirische, maar systematische weg, gesteund door het onderwerp tegels, de 5 regelmatige veelvlakken. De lichamen worden in scheve parallelprojektie getekend, terwijl ook nog een aantal halfregelmatige lichamen bestudeerd worden.

4. De periode 1965 tot heden

4.0. Inleiding

De jaren '60 staan bol van de 'modernisering van het wiskundeonderwijs'. Alom bekend is het Sputnik-effekt (1957), dat amerikaanse leerplanontwikkelaars aan het werk heeft gezet om spoedprogramma's gemoderniseerde wis-

kunde in elkaar te zetten. Men beschouwt in die dagen de wiskunde als een vak, dat zich zo snel uitbreidt als een stad, waarvan de kern vanuit de buitenwijken nog slechts te bereiken is door grote bruggen te slaan naar het hart van de 'stad'. Dit hart van de wiskunde zou bestaan uit de wezenlijke strukturen, die de randgebieden beheersen. Alom wint de gedachte veld, dat formele logika, verzamelingenleer, de leer der afbeeldingen en relaties en de strukturen als groepen, lichamen en ringen die de ruggegraat van de wiskunde vormen, ook als zodanig voor het wiskunde-onderwijs aangemerkt dienen te worden. Een eeuwenoude wetenschappelijke en didaktische utopie om vanuit het algemene afdalend tot het bizondere te geraken, duikt weer op. De kloof tussen het V.W.O. en wetenschappelijk onderwijs in de wiskunde lijkt groter dan ooit. Vooral vanuit de kringen van de universiteiten en hogescholen wordt daarom aandrang uitgeoefend om het wiskunde-onderwijs te moderniseren.
Daarnaast ontstaat een hausse in toegepaste vakken als komputerkunde, numerieke wiskunde, ekonometrie en informatika.
De vraag uit de maatschappij om praktische wiskundigen wordt hoe langer hoe dringerder. Veel bedrijven hebben of formeren hun eigen opleidingen. De C.M.L.W. vangt haar taak dan ook van bovenaf aan (1961). De eerste opdracht van de C.M.L.W. was zorg te dragen voor een betere aansluiting tussen het middelbaar onderwijs en het hoger onderwijs.
Gezien het bovenstaande is het begrijpelijk dat uit het traditionele programma geschrapt dienen te worden. *Dieudonné* heeft reeds zijn 'Weg met Euclides' uitgesproken en er lijken nog weinig aanhangers van de 'mikroskopie van de driehoek' te bestaan. De 'aksiomatiek' van de meetkunde uit het eerste jaar was reeds bij de eerdere 'modernisering' verwijderd uit het leerplan en er was een intuïtieve inleiding in de meetkunde voor in de plaats gesteld (1958).
De nekslag voor de traditionele meetkunde zal vallen. Nog schrijft *Duparc*: 'Wie dan ook heel radicaal is zou misschien de gehele meetkunde willen bannen uit ons schoolonderwijs. Ik kom hier ten sterkste tegen op om heel verschillende redenen'.[19]
Een van de redenen is volgens *Duparc*, dat juist bij de meetkunde het 'dooreenlopen van intuïtie, aanschouwing en zakelijke redenering' als voorbeeld van goed, wiskunde-onderwijs kan dienen.
Ook schrijft *Kuiper* nog een 'Lofzang op de meetkunde', waarin echter geen nieuwe gezichtspunten worden gegeven van waaruit men het traditionele meetkunde-onderwijs zou kunnen ondersteunen.[20] Het lijkt erop, dat de meetkunde, eens beschouwd als de parel van het wiskunde-onderwijs, zijn tijd heeft gehad.

4.1. Doelstellingen

In de zestiger jaren ebt de gebruikelijke doelstellingendiskussie volledig weg. Reeds draaien enige proefscholen met eksperimentele programma's wiskunde nieuwe stijl, voordat in 1968 de mammoetwet officieel zijn intrede doet en tegelijkertijd op het nieuwe wiskundeleerplan werd overgestapt. Kennelijk is men zo uitsluitend gericht op de inhoudelijke kant van het nieuwe leerplan, dat men aan vragen als 'waarom', 'waartoe', en 'hoe' ternauwernood toekomt.

Laat staan dat er diskussie over algemene doelstellingen op gang zou komen. Onderzoeken we de jaargangen van 'Euclides' – vanaf het jaar 1960 – dan blijken slechts drie artikelen te zijn verschenen die zich met deze problematiek hebben beziggehouden (*Peremans, v. d. Hak, v. d. Sluis*).

In het Interimrapport van de C.M.L.W. (mei 1967) lezen wij:
'Bij het opstellen van een programma voor de verschillende vormen van V.O. is het zaak te trachten een motivering aan dit programma te geven. Dit is in het algemeen geen gemakkelijke zaak en in ieder geval niet voor het vak wiskunde'.
Daarna worden de bekende argumenten als maatschappelijke, kultureel-historische relevantie en toepasbaarheid genoemd. Wat het meetkunde-programma voor de brugklas betreft, wordt de navolgende summiere opsomming van de leerstofonderdelen gegeven:

3 MEETKUNDE
a Introduktie van fundamentele begrippen, lijn, lijnstuk, halve lijn, verlengde en vlak.
b De hoek in het vlak: graad, gestrekte hoek, rechte hoek, scherpe hoek, stompe hoek, komplement en supplement, overstaande hoeken, overeenkomstige hoeken en verwisselende binnenhoeken, bissektrice, hoek van twee lijnen, loodrecht.
c De afstand: de afstand van punt en lijn, twee evenwijdige lijnen, de verzameling van de punten die een gegeven afstand tot een gegeven lijn hebben.
d De driehoek: scherphoekige, rechthoekige, stomphoekige, gelijkbenige en gelijkzijdige driehoeken, hoogtelijn, bissektrice en zwaartelijn.
e De vierhoek: vlieger, parallelogram, ruit, rechthoek, vierkant.
f Lijnspiegeling, lijnsymmetrie, puntspiegeling, puntsymmetrie, verschuiving en draaiing.
h Het begrip kongruent.

waarna een toelichting volgt (duidelijk bedoeld als hint aan de auteurs), waarmee men vele kanten op kan.

In de toelichting op het leerplan wiskunde (1968) wordt dan in het interimrapport ingegaan op de algemene doelstellingen:

'De door de leerlingen dikwijls gestelde vraag: 'Waarom moet ik wiskunde leren?' vindt haar oorsprong in het feit dat zij geen verband zien tussen hun toekomst en de wiskunde. Van het onderwijs in de eerste jaren dient een stimulans uit te gaan, zodat leerlingen die de begaafdheid daartoe hebben, dit vak later als examenvak kiezen. Mede daarom dient aanvankelijk niet het formele karakter van de wiskunde op de voorgrond gesteld te worden, maar zal een intuïtieve benadering het creatieve element, het zelf-actief met de stof bezig zijn, het kritisch denken een ruime plaats moeten hebben. Het zal noodzakelijk zijn ook het basisonderwijs in de vernieuwing te betrekken. Hier zijn andere landen ons reeds voorgegaan.
Zo kan bijvoorbeeld reeds heel wat intuïtieve kennis van vlakke- en ruimtemeetkunde worden verworven langs de weg van ervaring en experiment, door tekenen, meten en het maken van modellen. Op deze wijze wordt een betere voorbereiding gegeven op de wiskundestudie in het V.O. dan thans het geval is'.

Opmerkelijk is hier de zinsnede dat een intuïtieve benadering van de meetkunde naar het basisonderwijs wordt verwezen.
Over de meetkunde volgt dan:

'Wat in het voorgaande (de traditionele meetkunde) waardevol is en niet verloren mag gaan is:

a het verkrijgen van inzicht in de betekenis van een matematisch bewijs;
b het afleiden van resultaten, die voor hen, die later wiskunde moeten toepassen, van nut kunnen zijn'.

Hoe het onder a. gestelde geïnterpreteerd dient te worden, wordt aan de lezer zelf overgelaten. Duidelijk wordt wel uitgesproken, dat de leerling eerst langs intuïtieve weg vertrouwd dient te geraken met enige meetkundige begrippen om daarna de struktuur van de transformaties centraal te stellen. Ook in de richtlijnen die de gezamenlijke pedagogische centra (1968) voor een leerplan wiskunde voor het M.A.V.O. geven, komt men niet verder dan de inhoudelijke, de algemeen vormende, de toepassings- en de kulturele waarde van de wiskunde aan te dragen voor het wiskunde-onderwijs. Voor de meetkunde worden 19 min of meer didaktische aanwijzingen gegeven om tot een optimale leerprestatie van de leerlingen te kunnen geraken. Nadruk wordt gelegd op een oriënterende fase, op de moeilijkheden die 'het bewijzen' met zich meebrengt en op het taalaspekt. Toch lijkt men ook hier weer op twee gedachten te hinken. Enerzijds wordt ruime aandacht gevestigd op het deduktieve denken, terwijl anderzijds te lezen valt:

'Bij de meetkundige onderwerpen beperke men zich tot die gedeelten, die de meeste kans op *toepassing* bieden. Daardoor zal de meetkunde grotendeels *numeriek* zijn . . ..'

Samenvattende kunnen we zeggen dat wat betreft de meetkunde in het brugjaar de volgende konsekwenties getrokken worden:

a oriëntatie in ruimte en vlak dienen te blijven bestaan
b schijn-aksiomatiek dient vermeden te worden
c een intuïtieve benadering verdient de voorkeur
d de oude planimetrie wordt afgezworen
e de meetkunde dient een unificerend karakter te hebben op grond van transformaties (spiegelingen, rotaties, translaties)
f het deduceren blijft een (belangrijke) plaats innemen binnen het onder e genoemde
g het uiteindelijke doel is zo snel mogelijk te geraken tot een gearitmetiseerde meetkunde.

Laten we in de volgende paragraaf eens kijken hoe de auteurs van schoolboeken wat betreft het brugjaar op deze veranderingen hebben gereageerd.

4.3. De leerboeken

In 1968 gaan de scholen voor het V.O. over op nieuwe leerboeken. We delen de boeken in 4 kategorieën in wat betreft de meetkunde in het brugjaar:

A traditionele benadering met moderne aanpassing
B intuïtieve benadering van de transformatiemeetkunde
C transformatiemeetkunde in een aksiomatische opbouw
D informele veelzijdige benadering

ad **A**
De bestaande traditionele leergang wordt grotendeels gehandhaafd. De konstruktie en kongruentiegevallen van de driehoeken blijven centraal staan. De transformaties worden uit de kongruentie afgeleid. Een duidelijk behoudend karakter spreekt uit deze boeken.

ad **B**
De transformatiemeetkunde wordt intuïtief ingeleid. Soms wordt eerst konkreet gewerkt met vouwen, knippen, doorkijkspiegels. Daarna wordt getekend en gekonstrueerd. Het visuele element speelt een belangrijke rol. Veelal worden de transformaties, spiegeling, rotatie en translatie losstaand van elkaar beschouwd.
Vaak wordt gebruik gemaakt van roosters, ook om het vektorbegrip in te voeren. Een aksiomatische opbouw wordt vermeden.

ad **C**
Na een intuïtieve inleiding wordt de transformatie lijnspiegeling aksiomatisch vastgelegd met behulp van de volgende regels:

1 Elk punt P heeft één beeldpunt P'
Als P op de spiegelas ligt geldt $P = P'$
Als P niet op de as ligt in de as middelloodlijn van PP'.
2 Het beeld van lijn is een lijn.
3 Het beeld van een lijnstuk is een lijnstuk dat even lang is.
4 Het beeld van een hoek is een hoek, die even groot is, maar tegengestelde draaizin heeft.

Hierna moet natuurlijk ook nog een modus gevonden worden om het parallelen-aksioma in te voeren. Dit kan bijvoorbeeld gedaan worden door de volgende regel:

5 Als van een vierhoek 3 hoeken recht zijn dan is de 4e hoek ook recht. De traditionele wijze volgens Euclides kan natuurlijk ook gevolgd worden. (Als de som van 2 binnenhoeken, bij 2 lijnen gesneden door een derde, kleiner is dan 180°, snijden die lijnen elkaar).

Met behulp van deze regels wordt verder getracht de meetkunde deduktief op te bouwen. Er wordt ruime aandacht geschonken aan het systeem van aksioma's, definities en stellingen. Het bewijs staat centraal. Translaties en rotaties worden opgevat als produkten van lijnspiegelingen.

ad **D**
Veel aandacht voor ruimtefiguren, waarbij men zich niet alleen tot de kubus beperkt, maar ook het viervlak, achtvlak, blok, de bol, kegel en cylinder aan een eerste onderzoek onderwerpt. Hieraan worden telproblemen, konstrukties, netwerken, doorsnijdingen en inhoudsbepalingen verbonden. Het platte vlak wordt niet alleen vanuit het vierkantenrooster beschouwd, doch ook met andersoortige vlakvullingen volgelegd. Schatten, meten, konstrueren, grafieken maken, met koördinaten werken, behoren tot de meetkundige aktiviteiten. De transformaties komen – zij het niet zo sterk beklemtoond – eveneens aan bod.

5. Besluit

We noemen tenslotte de aspekten van de meetkunde, die aan de orde zijn geweest. De auteurs van de meetkunde-leerboeken hebben veelal de nadruk gelegd op de volgende 6 aspekten:

1 aanschouwelijk aspekt; oriëntatie in vlak en ruimte
2 het teken- en konstruktie-aspekt
3 het aspekt der nuttigheid (toepasbaarheid)
4 het logische aspekt (deduktief systeem)
5 het struktuur aspekt (kongruentietransformaties)
6 het algebraïsche aspekt

Al naar gelang stroming en/of leerplanvoorschrift kregen bepaalde punten de nadruk. Zo hebben de aspekten **5** en **6** vooral de laatste jaren het volle pond gekregen, maar **3** is er vaak bekaaid afgekomen. Er zijn 4 aspekten te noemen:

7 het reken- en meetaspekt
8 het taal- en relatie-aspekt
9 het kombinatorische aspekt
10 het topologische aspekt

Bekijken we het geheel aan uitwerkingen, dan moeten we besluiten met de vaststelling van Wansink:

'De modernisering van ons wiskunde-onderwijs in de zestiger jaren van deze eeuw heeft het stelsel van Euclides in zijn traditionele vorm, mèt de in de negentiende eeuw naar voren gekomen 'nieuwere meetkunde', uit ons schoolonderwijs doen verdwijnen en laat het probleem van aard en plaats van het resterend 'meetkunde'-onderwijs binnen ons voortgezet onderwijs tot dusver onopgelost'[21]

Zou de oplossing niet in de eerste plaats aan de basis van het onderwijs gezocht moeten worden? Het derde artikel handelt dan ook over het vraagstuk van de meetkunde op de basisschool.

Noten

1 Dijksterhuis, E.
Moet het Meetkunde-onderwijs gewijzigd worden? in 'Bijvoegsel van het Nieuwe Tijdschrift voor Wiskunde' 1 1924–25) p. 12
2 Ehrenfest-Afanassjewa, T.
Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven? Groningen 1924, p. 6
3 Ehrenfest-Afanassjewa, T.
Uebungensammlung zu einer Geometrischen Propädeuse; Den Haag 1931
4 Ehrenfest-Afanassjewa, T.
Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven? Groningen 1924, p. 18
5 Dijksterhuis, E. J.
Moet het Meetkunde-onderwijs gewijzigd worden? in 'Bijvoegsel van het Nieuwe Tijdschrift voor Wiskunde' 1 (1924–25) p. 12.
6 Beth, H. J. E.
Enkele beschouwingen inzake het Meetkunde-onderwijs; in 'Euclides' 10 (1933–34) p. 258
7 Schogt, J. H.
Beginselen der vlakke Meetkunde; Groningen 1929, p. 13.
8 Een dergelijk bewijs vindt men bijvoorbeeld bij;
Reinink & Teunis; Boomsma & Vriezen; Ingen Schenau & Westerhof.
9 Turkstra, H.
Psychologisch-Didactische Problemen bij het onderwijs in de Wiskunde aan de Middelbare School. Wat heeft de Psychologie voor de Wiskunde te zeggen; Groningen 1934.
10 Mooy, H.
Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies ter verdeling van de hoek in gelijke delen; Amsterdam, 1948. p. 18.
11 loc. cit. p. 53
12 Ehrenfest-Afanassjewa, T.
Kan het Wiskunde-onderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen? Discussie tussen T. Ehrenfest-Afanassjewa en Prof. Dr. H. Freudenthal. Purmerend 1951
13 loc. cit. p. 16
14 Rapport van de WIMECOS-commissie, Euclides 30 ('54–'55) p. 154
15 Freudenthal, H.
Report on Methods of initiation into Geometry; III, Groningen 1958
16 Boermeester, C.
Over Meetkunde-onderwijs en psychologie en andere didactische mogelijkheden voor het Meetkunde-onderwijs aan M.U.L.O.-scholen gebaseerd op psychologische inzichten; in 'peadagogische Monographieën' VI. Groningen-Djakarta 1955
17 Groot, A. D. de
Bewegingsmeetkunde; Groningen 1968
18 Hiele-Geldof, D. van
De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.; Amsterdam 1957.
19 Duparc, H. J. A.
Welke gevolgen brengt de veranderde plaats der wiskunde in de maatschappij met zich mee? Euclides 36 (1960–61) p. 194
20 Kuiper, N. H.
Lofzang op de meetkunde; Euclides 39 (1963–'64) p. 33–47
21 Wansink, J. H.
De zogenaamde 'nieuwe meetkunde' in de wiskundeprogramma's van de hbs; Een terugblik. Euclides 49 (73–74), p. 373

Ere wie ere toekomt!

LOURENS VAN DEN BROM

Krommenie

. . . *history has no value unless it be accurate, or as accurate as possible* . . .
George Sarton

1 De inhoud van ons tijdschrift Euclides werd verschillende keren verrijkt met een historische bijdrage van collega Smeur. De aanleiding tot die artikelen was vaak gelegen in het feit dat een rond aantal jaren verstreken was sinds de geboorte of het overlijden van een bekend wetenschapsbeoefenaar. Zo'n aanleiding is betrekkelijk, want indien wij onze getallen zouden noteren in een twaalftallig positiestelsel, in plaats van het decimale, dan was het aprilnummer van Euclides (1184/85) wellicht opgeluisterd met een artikel geïnspireerd door het overlijden van de noorse wiskundige Niels Hendrik Abel 100 jaar geleden op 6 april 1085, in plaats van het artikel dat verscheen ter gedenkenis van het feit dat 50 jaar geleden op 4 april 1923 John Venn de laatste adem uitblies.
Ondanks die betrekkelijkheid zal men het toch moeten waarderen dat de redactie van Euclides, maandblad voor de didactiek van de wiskunde, ook plaats biedt aan de Geschiedenis der Wiskunde. Want in de geschiedenis van een vak zijn ook didactische impulsen voor dat vak zelf te vinden en de geschiedenis der wetenschappen kan een bijdrage leveren in de discussies omtrent de maatschappelijke relevantie van die wetenschappen. Genoemde discussies worden tegenwoordig weleens aan de orde gesteld in verband met onderwijsreorganisaties.

Toch moet men oppassen bij dat produceren van die gelegenheidsopstellen. Vooral omdat men bij dat werk een verscheidenheid aan personen en onderwerpen te behandelen krijgt zal het niet altijd mogelijk zijn, voor één auteur, zich terdege in te werken in alle aan de orde te stellen thema's. Men zal voor het feitelijke deel van zo'n artikel dan een biografie, een encyclopedie of een soortgelijk boekwerk ter hand nemen met het gevaar dat men, als men niet voldoende georiënteerd is aangaande het betreffende onderwerp, niet kan beoordelen of de geraadpleegde bron zuiver is. Bij een eventuele conclusie, of bij het uitspreken van een oordeel, loopt men dan het gevaar fouten te maken omdat de bronnen waaruit men putte het weleens niet toelaten een historisch verantwoord beeld te geven.

2 Bij het opstellen van het artikel 'Felix Klein's "Erlanger Programm", 1872' in de 48e jaargang van Euclides (1972/73) blz. 67 heeft men de boven aangegeven voetangel niet weten te mijden.

a Over Klein wordt in het stuk opgemerkt:

'Hij heeft gestudeerd te Göttingen, bij Alfred Clebsch (1833-1872) en werd daarna te Bonn assistent van Julius Plücker (1801-1868).'

Klein heeft niet te Göttingen gestudeerd. Vanaf 1865 studeert hij te Bonn bij Plücker (natuurkunde) en Lipschitz (wiskunde). Klein is vanaf 1866 tot 1868 assistent bij Plücker voor de natuurkunde. Klein komt eerst na de dood van Plücker, op 22 mei 1868, in januari 1869 in aanraking met Clebsch in verband met de posthume uitgave van deel II van Plücker's 'Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement.'

Klein schrijft zelf over zijn relatie tot Clebsch:

'Schliesslich gehöre auch ich selbst in gewissem Masse diesem Kreise (de school van Clebsch) an, wenn ich auch erst verhältnismässig spät, nämlich erst hier in Göttingen, seine Anregungen aufgenommen und verarbeitet habe, um mich später mehr unmittelbar an Riemann anzuschliessen.' (Felix Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrhundert, deel I, blz. 297)

b Twee regels verder kan men in het geciteerde stuk lezen:

'In 1870 bezocht hij Parijs samen met de Noorse wiskundige Sophus Lie (1842-1899), medestudent uit Göttingen. Daar leerden zij Galois' (1811-1832) leer der substitutiegroepen kennen."

Ook Marius Sophus Lie heeft niet te Göttingen gestudeerd, maar te Christiania (Oslo), vanaf 1859, waarbij hij wiskundecolleges volgde bij Broch, Bjerknes en Sylow, zonder dat daarbij zijn begaafdheid voor de wiskunde duidelijk naar voren kwam.

Sylow, die wel inviel voor Broch, gaf colleges over substitutiegroepen en om die substitutiegroepen te leren kennen hoefde Lie dus niet naar Parijs te gaan.

In 1865 doet Lie examen voor leraar in de wiskunde en de natuurwetenschappen. Daarna weet hij niet precies in welke richting hij verder wil gaan. Maar in 1868 komt Lie door zelfstudie in aanraking met o.a. het werk van Poncelet en Plücker. Dan ontbrandt in hem een ontembaar creatief vuur, waaruit zijn eerste gedrukte publikatie te voorschijn komt, 'Representation des Imaginären der Plangeometrie' (1869). Deze publikatie bezorgt Lie een reisbeurs. Hij gaat dan voor het wintersemester 1869/70 naar Berlijn en daar ontmoet hij Klein.

c De indruk omtrent de relatie Lie – Klein met betrekking tot het Erlanger Programm, die uit het geciteerde artikel van Smeur overkomt, is een overeenstemming met de gangbare mening. Een mening, die afwijkt, is dat het aandeel van Lie aanmerkelijk groter is geweest dan dat van Klein.

Klein is bevriend met Lie als deze laatste in een zeer creatieve fase van zijn leven is. Lie spuit dan zoveel ideeën op dat hij geen tijd heeft die ideeën neer te leggen in didactisch verantwoorde publikaties. De ideeën die Klein verwoordt in het Erlanger Programm zijn van Lie afkomstig.

Het moge wellicht eigenwijs klinken een van de gangbare afwijkende mening te verkondigen. Ik ben echter op deze kwestie geattendeerd door Prof. Otto Volk (Würzburg) tijdens het Colloquium 'Problemgeschichte der Mathematik' Oberwolfach 1972.
Volk is in het bezit van een kopie van een artikel van Friedrich Engel (1861-1941), getiteld 'Zur Auseinandersetzung mit Felix Klein', waarin een prioriteitsstrijd tussen Lie en Klein behandeld wordt. Dat artikel van Engel was bedoeld om opgenomen te worden in deel VII van de 'Gesammelte Abhandlungen' van Sophus Lie. Na de dood van Engel is zijn artikel bij de druk (1960) van dat deel VII weggelaten.
Uit hetgeen wel gedrukt werd in deel VII van het verzamelde werk van Lie kan men opmaken dat Lie omstreekt 1872/73 van mening was dat in zijn omgang met Klein een wederzijdse bron van inspiratie gelegen was. Later (1894) tekent hij daarbij echter aan: 'Klein war von mir inspiriert.' En op een andere plaats: 'Ich hatte eine krankhafte Neigung dazu, Plücker, Klein, Darboux, usw. zu ehren.' Het is zeker de moeite waard na te gaan hoe de werkelijke relatie Lie – Klein met betrekking tot het Erlanger Programm geweest is, en of Klein als hij over Lie schrijft 'der bei meinem Erlanger Programm Pate stand', niet had behoren te schrijven 'bei seinem Erlanger Programm stand ich Pate.'

d Dan is het slot van het geciteerde artikel weinig gelukkig geformuleerd: *'Met Klein is de roem van Göttingen begonnen . . .'* De roem van Göttingen was reeds gevestigd door Gauss, Dirichlet, Riemann en Clebsch.

3 Het opstel 'John Venn' in het aprilnummer van Euclides 48 (1972/73), blz. 282 geeft mij eveneens aanleiding tot enige opmerkingen:
a 'Van 1853 tot 1857 studeerde hij wiskunde te Cambridge. In 1859 werd hij geestelijke der Anglikaanse kerk..'
De vraag of Venn uit roeping, daarbij tevens de familie-traditie volgende, zich in de geestelijke stand begaf, of dat hij, zoals gebruikelijk in Engeland in die dagen, het geestelijke ambt nodig had als schakel in één universitaire carrière, zullen we laten rusten. Wel merken we op dat Venn in 1857 bij de toen in Cambridge jaarlijks gehouden vergelijkende wiskunde-examens niet verder dan de zesde plaats kwam. Het resultaat bij zo'n examen hoeft natuurlijk geen maatstaf te zijn voor het wiskundig talent van de geëxamineerde. De stijl echter waarin het werk van Venn geschreven is – niet om door te worstelen – doet wel vermoeden dat we eerder te maken hebben met een theoloog dan met een wiskundige.
Dat Venn geen uitgesproken wiskundige mentaliteit bezat, althans er geen blijk van gaf, kunnen we wel uit het volgende opmaken. Een diagram, dat hij gebruikt ter verificatie van een uitspraak, waarin n klasse-variabelen voorkomen, bestaat uit n gesloten dubbelpunt-vrije krommen, in het vlak gelegen en dat vlak verdelende in 2^n compartimenten. (Het buitengebied dient daarbij ook als compartiment te worden opgevat.) De diagrammen dienen daarbij nog zo geconstrueerd te zijn dat bij het aanbrengen van de $k + 1$ – e kromme de compartimenten, 2^k in aantal, die gevormd zijn door de k reeds getekende krommen, ieder in twee compartimenten

verdeeld worden. Een wiskundige zal zich daarbij onmiddellijk afvragen of een dergelijk diagram voor iedere natuurlijke waarde van n te realiseren is. Bij Venn heb ik die vraag niet aangetroffen. Overigens had Venn door het stellen van die vraag kunnen komen tot die later naar Peano vernoemde kromme, althans had hij tot soortgelijke krommen kunnen komen. Want voor het aanbrengen van een 'volgende' kromme bij het tekenen der diagrammen kan men in ieder der compartimenten een punt kiezen, waarna men die punten op systematische wijze verbindt, waarbij dan 'Peano-achtige constructies' te voorschijn komen.
Ook bewijst Venn niet dat met cirkels voor het geval $n = 4$ geen diagram mogelijk is, alhoewel hij die onmogelijkheid wel opmerkt en hij ook stilstaat bij de praktijk van het tekenen der diagrammen. Een bewijs voor genoemde onmogelijkheid kan men aantreffen in 'Het klaverblad' van Joh. H. Wansink, Euclides 48 (1972/73), blz. 184.

b 'Op overeenkomstige wijze is het voor twee verzamelingen A en B te gebruiken; zonder arcering: sommige elementen van A zijn element van B, . . .', schrijft Smeur over het diagram voor het geval dat $n = 2$.
Venn gebruikt in zijn diagrammen slechts één teken, n.l. de arcering, waarmee hij aangeeft dat een compartiment 'is negatived', in de taal der verzamelingen zouden we zeggen 'leeg is'. Indien een compartiment niet gearceerd is, is omtrent dat compartiment niets bekend. De consequentie is, dat Venn zijn diagrammen niet kan gebruiken voor particuliere uitspraken, zoals *'sommige elementen van A zijn element van B'*, die in het bovenaangehaalde citaat voorkomt.
De consequentie is dus dat Venn zijn diagrammen niet kan toepassen bij de syllogistiek, zoals Bochenski dat ergens aangeeft.
Zij, die later de Venn-diagrammen wel voor de syllogistiek gebruiken, hebben ook een teken ter beschikking waarmee zij kunnen aangeven dat een compartiment niet leeg is.
Zonder arcering, of enig ander teken, heeft het diagram in de zin van Venn geen enkele betekenis. Het is dan als 't ware een blanco formulier.

c 'De eerste echter, die systematisch diagrammen gebruikte was Leibniz (1646-1716). Naast cirkeldiagrammen heeft hij ook figuren met parallele lijnstukken,' beweert Smeur.
Het lijkt mij dat aan het gebruik van diagrammen altijd wel een zekere systematiek verbonden zal zijn, bedoeld wordt:
'De eerste, die ter illustratie der syllogismen, systematisch diagrammen gebruikte was Leibniz.' Maar dan nog zal een bewijs voor die uitspraak moeilijk te geven zijn.
Het lijkt mij zelfs niet onmogelijk dat in de tijd van Leibniz het gebruik van diagrammen, als schoolmeesterstrucje, dat men niet publiceert, ter illustratie der syllogismen in bredere kring bekend was.
Uit het handschrift 'De formae logicae comprobatione per linearum ductus' van Leibniz is op te maken dat hij allereerst gebruikmaakte van de figuren met parallele lijnstukken en later daarnaast de cirkeldiagrammen tekende. In de ge-

drukte weergave van Couturat is dat verloren gegaan.

d 'De naam venndiagram mag men echter, terecht, zien als een eerbetoon aan John Venn,' zo besluit Smeur zijn artikel over Venn.
Gezien het feit dat Venn zeker geen uitgesproken wiskundige was en ook geen bijdrage geleverd heeft tot de ontwikkeling der wiskunde schijnt het mij onjuist Venn in de wiskunde te eren door één of andere vernoeming. Maar zo we Venn al wensen te eren in de wiskunde, dan doen we dat zeker niet door *'de diagrammen, die wij vanaf de eerste lessen in de brugklas gebruiken,'* die, zoals Smeur zelf al opmerkt, *'niet die van Venn zijn'*, naar hem te vernoemen.

Tot slot stel ik dan ook voor, daarbij tevens verwijzende naar het Rapport Nomenclatuurcommissie, Euclides 48 (1972/73), blz. 243, de gebruikelijke diagrammen ter illustratie van begrippen als vereniging, doorsnede, deelverzameling, etc. te noemen: verzamelingsdiagrammen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Agenda van de jaarvergadering op zaterdag 2 november 1974 in het gebouw van de Koninklijke Nederlandse Jaarbeurs, Croeselaan 6 te Utrecht.

Aanvang 10.00 uur.
1. Opening door de waarnemend voorzitter, dr. P. G. J. Vredenduin.
2. Notulen van de algemene vergadering 1973.
3. Jaarverslagen.
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing wegens overlijden van dr. J. K. van den Briel en periodiek aftreden van L. A. G. M. Muskens en dr. P. G. J. Vredenduin.
6. Vaststelling van de contributie 1975/76.
7. Inleiding over het thema 'bewijzen' door dr. P. G. J. Vredenduin gevolgd door discussie en werkgroepen.
8. Lunch ($\pm$12.30 uur–14.00 uur).
9. Inleiding over het thema 'bewijzen' door drs. J. van Dormolen gevolgd door discussie en werkgroepen.
10. Plenaire vergadering.
11. Rondvraag.
12. Sluiting.

De vereniging organiseert een gezamenlijke lunch in het jaarbeursgebouw.
Door verenigingssubsidie zijn de kosten hiervan *f* 6,50.
Deelnemers wordt verzocht voor 19 oktober dit bedrag over te schrijven op postgirorekening 143917 t.n.v. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.

Inhoud van vaten en vazen

Ir. H.M. MULDER

Breda

Er is een eenvoudige formule voor de inhoud van omwentelingslichamen waarvan grondvlak en bovenvlak dus loodrecht op de as staan.

$$I = \tfrac{1}{6}h\,(G + 4M + B)$$

waarbij G de oppervlakte van het grondvlak voorstelt, M van het middenvlak halverwege en B van het bovenvlak; h is de hoogte.

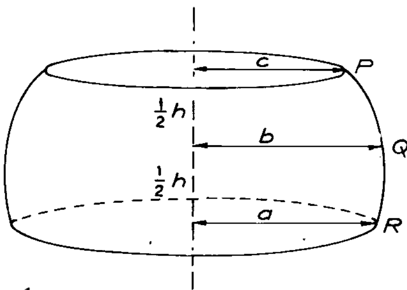


fig. 1

Voor de hiernaast afgebeelde vaas zou dit dus worden:

$$I = \tfrac{1}{6}h\,(\pi a^2 + \pi b^2 + \pi c^2)$$

Deze formule is in de meeste gevallen een uitstekende benadering van een gezochte inhoud.

De vraag is: in welke gevallen is de uitkomst exact?
Of anders gezegd: welke kromme wordt bij deze formule door de drie gegeven punten P, Q en R gedacht?
Het blijkt dat elke kromme van het type

$$x^2 = Ay^3 + By^2 + Cy + D$$

die gaat door de betreffende punten, voldoet.

Hier volgt het bewijs.
We proberen eerst A, B, C en D te bepalen.

$$y = +\tfrac{1}{2}h \text{ als } x = c \text{ dus } c^2 = \tfrac{1}{8}Ah^3 + \tfrac{1}{4}Bh^2 + \tfrac{1}{2}Ch + D \qquad \text{(I)}$$
$$y = -\tfrac{1}{2}h \text{ bij } x = a \text{ dus } a^2 = -\tfrac{1}{8}Ah^3 + \tfrac{1}{4}Bh^2 - \tfrac{1}{2}Ch + D \qquad \text{(II)}$$

$$y = 0 \quad \text{bij} \quad x = b \quad \text{dus} \quad b^2 = D \qquad \text{(III)}$$

(I) + (II) en (III) geeft:

$$a^2 + c^2 = \tfrac{1}{2}Bh^2 + 2b^2 \text{ dus } B = \frac{2a^2 - 4b^2 + 2c^2}{h^2}$$

(I) – (II) geeft:

$$c^2 - a^2 = \tfrac{1}{4}Ah^3 + Ch \text{ dus } C = \frac{4c^2 - 4a^2 - Ah^3}{4h}$$

tenslotte: A is nog vrij te kiezen.
Er gaan dus oneindig veel van dergelijke krommen door de gegeven punten. Voor elk ervan is de genoemde inhoudsformule exact van toepassing.
We bepalen de inhoud door integratie:

$$I = \pi \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} x^2 \, dy = \pi \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} (Ay^3 + By^2 + Cy + D) \, dy =$$

$$\pi \left(\tfrac{1}{4}Ay^4 + \tfrac{1}{3}By^3 + \tfrac{1}{2}Cy^2 + Dy\right)\Big|_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} = \pi\left(\tfrac{1}{12}Bh^3 + Dh\right) =$$

$$\pi \left(\frac{2a^2 - 4b^2 + 2c^2}{12h^2} . h^3 + b^2h\right) = \tfrac{1}{6}\pi h \left(a^2 - 2b^2 + c^2 + 6b^2\right) =$$

$$\tfrac{1}{6}\pi h \left(a^2 + 4b^2 + c^2\right)$$

ofwel bovengenoemde formule.

Het is altijd mogelijk A = 0 te stellen, zodat er dan steeds een tweedegraadskromme te vinden is die voldoet.
In het getekende geval kan het de ellips van het type zijn:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{(y + q)^2}{r^2} = 1$$

Deze ellips heeft als middelpunt $(0, q)$ waarbij door invulling van de gegeven coördinaten $(c, \tfrac{1}{2}h)$, $(b, 0)$ en $(a, -\tfrac{1}{2}h)$ voor q volgt:

$$q = \frac{h(c^2 - a^2)}{4(a^2 - 2b^2 + c^2)}$$

Naast deze ellips voldoen nog oneindig veel derdegraadskrommen, gaande door de gegeven punten, waarbij telkens de inhoud van het betreffende omwentelingslichaam bepaald wordt door de eenvoudige formule.

Hier volgt een voorbeeld waarbij een ellips en een derdegraadskromme door dezelfde punten gelegd worden. We nemen de punten:

$$(3,1), (4,0), (\sqrt{15}, -1)$$

en

$$(-3,1), (-4,0), (-\sqrt{15}, -1)$$

Hierdoor gaat de kromme

$$x^2 = y^3 - 4y^2 - 4y + 16 \qquad \text{(I)}$$

of

$$x^2 = (y - 4)(y - 2)(y + 2)$$

De kromme bestaat uit een gesloten 'ellipsachtig' gedeelte en een losse tak door (0,4) als minimum.
De uiterste punten op de y-as bij het gesloten deel liggen op (0, 2) en (0, −2).
De uiterste punten links en rechts bij het gesloten deel liggen ongeveer bij $y = \pm 0{,}430$.
Nu leggen we een ellips door de aangenomen punten.
De algemene vorm is

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{(y + q)^2}{r^2} = 1$$

Invulling van de gegeven coördinaten geeft oplossingen voor p, q en r.
We vinden dan

$$\frac{1}{p^2} = \frac{16}{265}; \frac{1}{r^2} = \frac{64}{265} \text{ en } q = \frac{3}{8}$$

zodat de vergelijking wordt:

$$\frac{16}{265}x^2 + \frac{64}{265}(y + \tfrac{3}{8})^2 = 1$$

of

$$16x^2 = -64y^2 - 48y + 256$$

of

$$x^2 = -4y^2 - 3y + 16 \qquad \text{(II)}$$

De assen van deze ellips zijn $x = 0$ en $y = -\frac{3}{8}$.
De vertikale as is ongeveer 4,4 lang en de horizontale as 8,2.

In de figuur zijn beide krommen door de gegeven punten P, Q en R getekend. Het is opvallend hoe ze in het gesloten deel, waar het ons er juist om gaat, samenvallen.

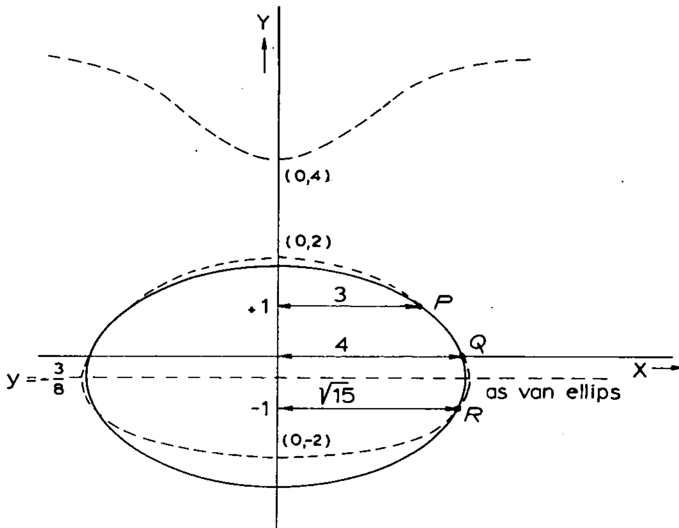


fig. 2

De inhoudsformule is aanvankelijk geconstrueerd voor de bepaling van de inhoud van wijnvaten.
Daarbij zijn grond- en bovenvlak meestal even groot.
In dat geval geldt $c = a$ en worden in de algemene formule:

$$B = \frac{4(a^2 - b^2)}{h^2} \quad D = b^2 \quad C = -\tfrac{1}{4}Ah^2 \quad \text{en } A \text{ nog willekeurig.}$$

De algemene vorm wordt nu voor een kromme door de punten $(a, \frac{1}{2}h)$, $(b, 0)$ en $(a, -\frac{1}{2}h)$

$$x^2 = Ay^3 + \frac{4(a^2 - b^2)}{h^2}\, y^2 - \tfrac{1}{4}Ah^2y + b^2$$

We willen nu de derdegraadskrommen even uitschakelen, zodat we weer $A = 0$ stellen. We houden dan over:

$$x^2 = \frac{4\,(a^2 - b^2)}{h^2}\, y^2 + b^2$$

Deze kromme heeft de oorsprong als middelpunt.
1) deze kromme is een *cirkel* als:

$$4(a^2 - b^2) = h^2$$

en wel $x^2 + y^2 = b^2$ (met b als straal)
Het omwentelingslichaam is dan een bol

2) een *ellips* als a < b met snijpunten op de y-as voor:

$$y_{1\,2} = \pm \frac{bh}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$$

3) een *hyperbool* als a > b
4) een *stel vertikale rechten* $x = +b$ en $x = -b$ als $a = b$.
Het omwentelingslichaam is dan een cilinder. Dit is wel het eenvoudigste geval
5) *twee snijdende rechten* als $b = 0$

$$x = \pm \frac{2a}{h} . y$$

het omwentelingslichaam is dan een kegel

Tenslotte de vraag: kan de kromme een *parabool* worden?
We keren terug naar de algemene vorm

$$x^2 = Ay^3 + By^2 + Cy + D$$

een parabool als $A = 0$ en $B = 0$, waarbij $B = 0$ betekent:

$$2b^2 = a^2 + c^2$$

dit is juist de voorwaarde.
De parabool wordt dan

$$x^2 = \frac{c^2 - a^2}{h} . v + \frac{c^2 + a^2}{2}$$

Stichting Mathematisch Centrum

Oriënterend Colloquium voor leraren

Gedurende het cursusjaar 1974–75 zal door het Mathematisch Centrum een cursus *Meetkunde en haar relatie tot de algebra* worden gegeven voor leraren VWO en HAVO en andere belangstellenden. Van de te behandelen stof zal een syllabus worden uitgereikt.
Bij deze cursus zal aandacht worden besteed aan de algebraïsche aspecten van de meetkunde die voor het VWO-onderwijs van belang zijn. Een deel van de cursus zal in de vorm van een werkcollege worden gegeven.

Aanvangsdatum:	woensdag 25 september a.s.
Tijd:	19.45 (precies) – 21.30 uur
Plaats:	Mathematisch Centrum, grote collegezaal (3e etage)
Frequentie:	wekelijks behalve in de schoolvakanties
Leiding:	mevr. drs. J. M. Geysel
Kosten:	geen
Aanmelding:	zo spoedig mogelijk bij het Secretariaat van het Mathematisch Centrum (tst. 64).

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1973–31 juli 1974.

Op 25 mei 1974 is onze voorzitter, dr. J. K. van den Briel plotseling overleden. Onze vereniging verloor in hem een voorzitter die sinds 1969 de vereniging op een voortreffelijke manier leidde.
Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. J. K. van den Briel, opgevolgd als waarnemend voorzitter door dr. P. G. J. Vredenduin, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester drs. J. van Dormolen, overige leden L. van Beek, M. Kindt, L. A. G. M. Muskens, dr. P. G. J. Vredenduin en L. Bozuwa (sinds oktober).
Op 17 september werd te Utrecht een forumbijeenkomst gehouden over de wiskunde-eindexamens voor havo en vwo in 1973.
Tussen 15 en 29 september werden te Arnhem, Assen, Bergen op Zoom, Geleen, 's-Gravenhage, Haarlem, Hengelo, Leeuwarden, Tilburg, Utrecht, en Venlo forumbijeenkomsten gehouden voor bespreking van de examens wiskunde 1973 mavo-3 en mavo-4.
In september en oktober werden in samenwerking met de inspectie voorlichtingsbijeenkomsten over de examens 1974 voor havo en vwo gehouden te Eindhoven, Haarlem, Rotterdam en Zwolle.
De jaarvergadering is gehouden in het Jaarbeursgebouw te Utrecht op 27 oktober. Sprekers waren: prof. dr. Th. Bezembinder, prof. dr. H. C. Hamaker en drs. P. Kalmijn.
De didactiekcommissie heeft dit jaar verscheidene bijeenkomsten georganiseerd, zowel voor docenten die nog niet eerder een bijeenkomst hadden meegemaakt als voor docenten die een follow-up was beloofd. Door een commissie onder leiding van M. Kindt wordt gewerkt aan een bundel wiskunde-opgaven voor havo.
Aan de Minister en de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen zijn brieven gezonden aangaande wiskunde-I voor toekomstige studenten in de faculteit der sociale wetenschappen.
Aan de Minister van Onderwijs en Wetenschappen is een brief gezonden met voorstellen tot wijziging van de exameneisen voor de akten wiskunde MO-A en B.
Bij de Commissie vaststelling opgaven is geprotesteerd tegen de hernormering van het onderdeel wiskunde-II van het examen mavo-4 in 1973.
Het bestuur vergaderde dit jaar zes maal, waaronder eenmaal gezamenlijk met de inspectie.

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 27 oktober 1973 in de Koninklijke Nederlandse Jaarbeurs te Utrecht.

Om 10.40 uur opent de voorzitter, dr. J. K. van den Briel, de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom de ereleden drs. A. J. S. van Dam en dr. Joh. H. Wansink; de spreker drs. P. Kalmijn; de inspecteurs drs. W. E. de Jong, E. H. Schmidt en N. J. Zimmerman; de vertegenwoordiger van 'Euclides' W. Kleijne en de vertegenwoordiger van Wolters-Noordhoff D. W. Soeteman.
Hierna spreekt de voorzitter zijn jaarrede uit; deze is gepubliceerd in 'Euclides'.
De notulen van de algemene vergadering van 28 oktober 1972, de jaarverslagen en de begroting 1974/74 worden goedgekeurd. De penningmeester wordt décharge verleend; in de kascommissie worden benoemd de heren R. M. T. E. Oomes en C. Ploeger.
Zonder stemming worden de heren drs. J. van Dormolen en M. Kindt tot bestuurslid herkozen terwijl ter uitbreiding van het bestuur de heer L. Bozuwa als bestuurslid wordt gekozen.
De contributie voor het jaar 1974/75 wordt in verband met de verhoging van de abonnementsprijs van 'Euclides' verhoogd tot vijf en twintig gulden.
Vervolgens verwelkomt de voorzitter de inmiddels aanwezige spreker prof. dr. Th. Bezembinder en wordt de vergadering in twee delen gesplitst. De heer prof. dr. Th. Bezembinder krijgt het woord over 'Psychologie, statistiek en wiskunde' en de heer drs. P. Kalmijn over 'Wiskunde in het dagelijks leven'.
Hierna wordt de middagpauze gehouden.
Na de middagpauze verwelkomt de voorzitter de spreker prof. dr. H. C. Hamaker en geeft hem vervolgens het woord over 'De toepassing van de kansrekening en statistiek bij de beoordeling van kansspelen'.
Als volgende punt staat op de agenda 'Activiteiten van de vereniging'. De voorzitter zet uiteen dat de groei van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (van circa 700 leden in 1968 tot

circa 1800 leden in 1973) is gepaard gegaan met een niet-stijgen van het aantal bezoekers van de jaarvergaderingen. Het bestuur vindt deze ontwikkeling onbevredigend en wil in verband hiermee graag een discussie op gang brengen over de volgende punten:

a De activiteiten van de NVvW zouden in toenemende mate kunnen worden geregionaliseerd, bij voorbeeld door het instellen van regionale werkgroepen.

b Naast of in plaats van regionale werkgroepen zou de oprichting van thematische werkgroepen kunnen worden bevorderd.

c In andere vorm zal de jaarvergadering wellicht meer belangstelling wekken. Ideeën die hierover in het bestuur leven zijn:

1. het inbedden van de jaarvergadering in een tweedaagse conferentie.
2. het inbedden van de jaarvergadering in een thematische dag.

Bovendien verdient het overweging om de jaarvergadering jaarlijks in een andere plaats te houden.

De heer K. J. Wynia meent dat er een situatie geschapen moet worden waarbij de contacten op de vergadering tussen de collega's groter moet worden.

De heer G. F. Smit vindt het contact bij de regionale besprekingen prettig. Hier zijn de contacten geringer. De behandelde onderwerpen zijn interessant maar men doet er zo weinig mee. Bij een thematische dag is er sprake van uitdieping.

De voorzitter meent dat een thema moeilijker is dan een examenbespreking. Hiervoor is mankracht nodig.

De heer Smit zegt dat de regio hieraan kan werken.

De heer drs. J. van Dormolen vraagt of hier meer belangstelling voor bestaat. Er moeten dan enkele tientallen werkgroepen komen zoals bij de cursussen van het IOWO waarvoor veel belangstelling bestaat. De heer W. Kremers zegt dat ook voor de IOWO-cursussen belangstelling een eerste vereiste is.

De heer Van Dormolen vindt tien werkgroepen wel veel. Het IOWO heeft een staf personeel terwijl de vereniging alles zelf moet doen. Misschien zal men hier met het IOWO moeten gaan samenwerken.

De voorzitter zegt dat wij op didactisch terrein gaarne samen werken maar dat mankracht overal het grote punt is.

De heer Van Dormolen zou gaarne weten wie van de aanwezigen ook naar een tweedaagse bijeenkomst zou komen.

De heer L. J. M. Kuijk meent dat als men het druk heeft men wel graag eens een avond thuis is. Een dag van half elf tot zes uur gaat nog wel. Het is geen doelstelling om zoveel mogelijk mensen te trekken. Het is nu leuk en gezellig. Bij de meeste mensen is geen behoefte aan een bijeenkomst. Als men de vereniging en bijeenkomsten nodig heeft komt men heus wel. Hoe meer men betrokken raakt, des te meer zal men komen. Hij meent dat bijeenkomsten op één dag moeten zijn.

De heer dr. Joh. H. Wansink stelt voor de bijeenkomsten tot één dag te beperken. Bij de invoering in 1937 van het hbs-programma en bij de bijeenkomst over het nieuwe mammoetprogramma kwamen meer dan honderd leden op de vergadering. Een leden trekkend onderwerp voor volgend jaar zou kunnen zijn 'Wiskunde op de middenschool'. In één dag kan men dan voldoende zeggen.

De heer D. W. Soeteman meent dat de vraag aan de verkeerde groep wordt gesteld. Hij stelt voor een vragenformulier in 'Euclides' in te voegen.

De heer drs. A. J. Th. Maassen meent dat het geen doel moet zijn het aantal de vergadering bezoekende leden op te voeren. Dat er meer dan 1700 afwezigen zijn toont aan dat wegblijven gemakkelijk is. Toch willen er nog 60 leden komen. Laat voor hen de huidige vergaderingen niet verdwijnen. De heer G. F. Smit zegt dat er in Haarlem zeker belangstelling is voor regionale bijeenkomsten.

De voorzitter zegt dat didactische bijeenkomsten nog helemaal nieuw zijn; we krijgen geleidelijk een idee wat we in anderhalve dag kunnen doen. We beschikken echter alleen over didactici uit de klas, maar niet over theoretici.

De heer Van Dormolen vindt dat de groepsleiders aan de grens van hun kunnen zitten, maar zelf ook veel van de bijeenkomsten leren. Uit de gegeven cursussen ontstaat een nieuw kader; dit kan zelfstandig gaan optreden.

De voorzitter constateert dat regionale bijeenkomsten door moeten gaan; de vraag is alleen of didactiek of inhoud van het onderwijs hoofdzaak moet zijn.

De heer dr. P. G. J. Vredenduin constateert dat er behoefte is aan meer contact. Hij vraagt zich af of dit ook zonder een grote organisatorische voorbereiding kan. Hij denkt aan centra waar de actieve komers ook zelf iets doen onder leiding van een expert.

De voorzitter ziet liever geen regionale besturen. Hij voelt meer voor een uitbouw van activiteiten door een contactman. Het gaat nu vooral om het uitwisselen van contacten.
De grote meerderheid van de aanwezigen is voor regionale contacten. Hierna gaat de voorzitter over tot de rondvraag.
Allereerst deelt de voorzitter mee dat van de Nederlandse Onderwijs Televisie een schrijven is ontvangen over medewerking van de vereniging aan een televisieserie wiskunde voor de brugklas. De voorzitter deelt mee dat het bestuur medewerking nuttig vindt, maar hij meent dat dit te veel tijd zal vragen. Didactisch is de N.O.T. namelijk geheel op de medewerkers aangewezen. De heren G. F. Smit, P. G. ter Laak en A. K. J. Wytzes verklaren zich bereid om aan het project mee te werken.
De heer N. J. Zimmerman dankt de vereniging dat de inspectie dit jaar weer gast van de vereniging was. Hij voelt zich nooit ambtshalve aanwezig, maar altijd onder vrienden. Hij wenst de vereniging veel goeds voor het komend verenigingsjaar.
De heer drs. A. J. Th. Maassen vraagt het bestuur te vermijden dat voor het eindexamen afspraken gemaakt worden over de inhoud van te geven opdrachten. Hij hoopt dat de eindexamenopgaven geen vakjargon voor ingewijden gaan worden. De heer dr. P. G. J. Vredenduin wijst op afspraken met de inspectie. De moeilijkheid is gelegen in wat van correctoren gevraagd wordt. Daartoe worden door de inspectie richtlijnen gegeven.
De heer G. F. Smit vindt dat de docenten een te grote vrijheid hebben gekregen, wat bij correctie problemen kan opleveren. Hiervoor moeten richtlijnen gegeven worden.
De heer A. K. J. Wytzes is bang dat de staatsexamens voor onderwijsbevoegdheid dreigen te verdwijnen als de subsidiering van part-time opleidingen verdwijnt. Hij vraagt zich af of de vereniging dit voortbestaan niet veilig moet stellen. De heer E. H. Schmidt merkt op dat de wet op het voortgezet onderwijs nieuwe bevoegdheden heeft gecreeerd, dus de oude akten gaan verdwijnen. Hopelijk komen er voor nieuwe bevoegdheden nieuwe regelingen.
Volgens de heer Vredenduin hebben wij nu part-time opleidingen die te zijner tijd zullen verdwijnen. Hiernaast zijn er experimentele opleidingen nieuwe stijl. Hierbij zullen ook part-time opleidingen moeten komen. Ook de dubbele bevoegdheid zal nog moeten worden gekanaliseerd.
De heer K. Y. Wynia wil graag informatie over voortentamens wiskunde bij het hoger onderwijs. De voorzitter deelt mee dat er beraad is in de Academische Raad en op het ministerie. De vereniging heeft een brief aan de minister gezonden en wordt op de hoogte gehouden.
De heer Wansink herinnert aan zijn vragen in de vorige jaarvergadering over de wiskundewerkgroep WVO. Hij wil graag het standpunt van het bestuur weten. De voorzitter ziet het enige contact met de werkgroep in het feit dat men samen 'Euclides' als orgaan heeft. Wij kunnen de werkgroep niet uit 'Euclides' zetten. Aan de werkgroep is al gevraagd zich op te heffen, maar Muusse wil nieuw leven in de werkgroep hebben. De enige mogelijkheid om de samenwerking in 'Euclides' te wijzigen ligt bij Wolters-Noordhoff door middel van de gesloten overeenkomst. De heer Wansink merkt tenslotte op dat iemands dood altijd door een ander wordt geconstateerd.
Hierna sluit de voorzitter om 16.57 uur de vergadering.

Eindexamen - tweede tijdvak - 1974

WISKUNDE-HAVO (3 uur)

1 Gegeven zijn de functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$f : x \to -1+\sqrt{2x+1}$ en $g : x \to -2x+4$.

a Wat is het domein van f?
Wat is het bereik van f?
b Bereken de hoek waaronder de grafieken van f en g elkaar snijden.
c Teken in één figuur de grafieken van f en g.

2 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven het punt $P(-3, 4)$ en de lijn l:
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
a Op de lijn l liggen punten waarvan de afstand tot P gelijk is aan 7.
Bereken de coördinaten van deze punten.
b De punten P en P' zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van l.
Bereken de coördinaten van P'.

3 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel zijn gegeven de punten $O(0, 0, 0)$, $A(6, 3, 0)$ $B(0, 6, 3)$, $C(0, 3, 6)$ en $D(0, p, p+6)$.
a Punt P is de projectie van punt O op het vlak door de punten A, B en C.
Bewijs dat P op de lijn AC ligt.
b De lijn OP snijdt de lijn AD.
Bereken p.

4 Met domein $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leqq x \leqq 2\pi\}$ is gegeven de functie

$f : x \to \cos^2 x - \cos x$.

a Onderzoek de functie f.
Wat is het bereik van f?
b Teken de grafiek van f.
c Los op $f(x) < \frac{3}{4}$.

5 In een bak zitten tien even grote knikkers, namelijk 1 gele, 2 rode en 7 blauwe. Men neemt zonder te kijken een knikker uit de bak. Voor het trekken van de gele knikker krijgt men 2 punten, voor een rode 1 punt en voor een blauwe 0 punten.
a Bereken de kans dat men bij drie maal willekeurig trekken zonder terugleggen in totaal precies 4 punten behaalt.
b Bereken de kans dat men bij drie maal willekeurig trekken met terugleggen in totaal precies 4 punten behaalt.
Licht elk antwoord toe.

6 Gegeven zijn de functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$f : x \to 2x.2|x|$ en $g : x \to 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

a Los op: $f(x) < 8$.
De punten A en B zijn de snijpunten van de grafieken van f en g.
b Bereken de coördinaten van A en B.
c De grafiek van een tweedegraadsfunctie gaat door de punten A en B en raakt de x-as in punt C.
Bereken de coördinaten van C.

WISKUNDE I-VWO (3 uur)

Kandidaten opgeleid volgens het definitieve examenprogramma maken de opgaven 1, 2, 3 en 4. Kandidaten van scholen die deelnemen aan het experiment „Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek" bij Wiskunde I maken de opgaven 1, 3, 4 en 5.

1 De functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is gegeven door $f : x \to 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

a Wat is het bereik van f?

De functie g van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ gegeven door

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{voor } x < -1 \\ g(x) = a + b \ln(2x+3) & \text{voor } x \geqq -1 \end{cases}$$

is differentieerbaar voor $x = -1$.

b Bereken a en b.

c Welke buigpunten heeft de grafiek van g?

2 Gegeven is de differentiaalvergelijking $x\,dy = y \ln x\,dx$.

a Teken de verzameling van de punten waarin deze differentiaalvergelijking een lijnelement definieert dat loodrecht op de y-as staat.

b Welke niet op de x-as gelegen punten P hebben de eigenschap dat de door P gaande integraalkromme van de gegeven differentiaalvergelijking in P de lijn OP raakt?

c Van een functie f met domein $\mathbb{R}^+$ is gegeven dat zijn grafiek een integraalkromme van de gegeven differentiaalvergelijking is en dat 3 een extreme waarde van $f(x)$ is.
Is die extreme waarde een maximum of een minimum?
Welke functie is f?

3 Gegeven is de functie $f : x \to 2x.e^{1-x}$ met domein $\mathbb{R}$.

a Onderzoek de functie f en teken de grafiek van f.
Bereken de coördinaten van het buigpunt van deze grafiek.

b Voor welke a en b is de functie $x \to af(x) + bf'(x)$ een primitieve van de functie f?

c Voor $t \neq 0$ is $A(t)$ de oppervlakte van het gesloten vlakdeel begrensd door de x-as, de grafiek van f en de lijn $x = t$.
Voor welke k geldt: $A(k) = \lim_{t \to +\infty} A(t)$?

4 Een kromme K is gegeven door
$x = 2\cos t$ en $y = 1 + \sin 2t$ waarbij $0 \leqq t \leqq \pi$.

a Bewijs dat K de x-as raakt.
Bereken de hoek waaronder K de y-as snijdt.

b Bewijs dat K symmetrisch is ten opzichte van het punt (0, 1).

c Teken K en de bijbehorende raaklijnen in de eindpunten van K.

5 Twee personen A en B spelen een spel: elk werpt éénmaal met een zuivere dobbelsteen.
De stochast X is het aantal ogen dat A werpt.
De stochast Y is het aantal ogen dat B werpt.
De stochast V wordt gedefinieerd door $V = |X - Y|$.

a Toon aan dat de eventualiteiten $X = 3$ en $V = 0$ onafhankelijk zijn.

b Bewijs dat de stochasten X en V niet onafhankelijk zijn.

c Toon aan dat de variantie van V gelijk is aan $\frac{665}{324}$.

d Het spel wordt een aantal keren onafhankelijk herhaald.
Na elk spel wordt de waarde van de stochast V genoteerd. Het gemiddelde van de waarden van V is de stochast W.
Hoe vaak moeten A en B het spel tenminste spelen opdat de standaardafwijking van W kleiner is dan $\frac{1}{2}$?

WISKUNDE II-VWO (3 uur)

Serie A is bestemd voor kandidaten die opgeleid zijn volgens het moderne examenprogramma. Serie B is uitsluitend bestemd voor kandidaten die in 1973 zijn afgewezen en die opgeleid zijn volgens het examenprogramma 1972–1973 (Stereometrie en Analytische Meetkunde)

A 1 Ten opzichte van een orthonormale basis in R_3 zijn gegeven de punten $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ en $D(0, 0, 1)$.
Deze punten zijn hoekpunten van de kubus $OABC.DEFG$.
Het midden van de ribbe BF is punt M.
a Een lijn l door O die in het vlak $x_3 = 0$ ligt, maakt gelijke hoeken met de lijnen CM en EM. Stel een vectorvoorstelling op van l.
b K is een punt van de lijn AF. De oppervlakte van driehoek BGK is minimaal. Bereken de coördinaten van K.
c Vlak V gaat door O en snijdt de lijnen DG, DM en DA achtereenvolgens in de punten P, Q en R. Vierhoek $OPQR$ is een parallellogram. Stel een vergelijking van het vlak V op.

A 2 Ten opzichte van een orthonormale basis in R_3 zijn gegeven de punten $O(0, 0, 0)$, $A(4, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 4)$, $D(0, 4, 8)$ en $E(8, 0, 4)$.
De afbeelding P is de loodrechte projectie op het vlak BEO.
De afbeelding R_φ is de rotatie om de lijn OB over een hoek φ zo dat A het beeld van C is als $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.
a Stel de matrix op van de afbeelding P.
b Onder de afbeelding $R_{\frac{1}{2}\pi} \circ P$ heeft de lijn DE een beeld. Stel een vectorvoorstelling op van dit beeld van DE.
c Bewijs dat de kern van de afbeelding $R_\varphi \circ P$ onafhankelijk is van φ.
d Een bol β gaat door C, raakt de lijn DE in D en raakt het vlak BEO. Stel een vergelijking op van β.

A 3 Ten opzichte van een orthonormale basis in R_3 zijn gegeven de

afbeeldingen A_p met matrix $\begin{pmatrix} 0 & p & -p \\ p & 0 & p \\ p & p & 0 \end{pmatrix}$ waarin $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a Bewijs dat voor elke p de afbeelding A_p singulier is.
b Wat is bij variabele p de verzameling van de beelden van het punt $(1, 2, 1)$ onder de afbeeldingen A_p?
c Voor welke p en voor welke $\bar{x} \neq \bar{o}$ geldt: $A_p(\bar{x}) = \bar{x}$?
d Welke vlakken hebben bij elke A_p hetzelfde volledig origineel als het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 0$? N.B. Bij een afbeelding is het volledig origineel van een verzameling V de verzameling van alle originelen van de elementen V.

B 1 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven
een lijn l met vergelijking $x - y + 4 = 0$
en een parabool π met vergelijking $y^2 - 2x - 4 = 0$.
a De poollijn ten opzichte van π van een punt A dat buiten π ligt, snijdt π in de punten B en C. De lijn door A evenwijdig aan de X-as, snijdt de lijn BC in punt D. Bewijs dat D het midden van het lijnstuk BC is.
Punt A doorloopt de lijn l.
b Stel een vergelijking op van de verzameling van de punten D.
c Bereken de minimale afstand van de punten A en D.

B 2 Het grondvlak $ABCD$ van een vierzijdige piramide met top T is een vierkant met zijde $2p$. De projectie van T op het grondvlak $ABCD$ valt samen met het midden M van de ribbe AD. Het midden van de ribbe CT is punt P en $CP = p\sqrt{2}$.

a De omgeschreven bol van viervlak $BCDP$ snijdt van de lijn TM een koorde af.
Druk de lengte van deze koorde uit in p.

b Een lijn l gaat door punt B, kruist de lijn DT loodrecht en maakt een zo klein mogelijke hoek met de lijn AT.
Hoe groot is deze hoek?
Construeer in een projectiefiguur van de piramide het snijpunt van de lijn l en het vlak CDT.
Geef een korte toelichting.

B 3 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven een ellips met vergelijking $x^2+4y^2 = 4$.
Op de ellips ligt een punt P, niet op één van de assen.
De raaklijn in P van de ellips snijdt de Y-as in punt Q.
De normaal in P van de ellips snijdt de Y-as in punt R.

a Bewijs dat de omgeschreven cirkel van ΔPQR door de beide brandpunten van de ellips gaat.

b Punt P doorloopt de ellips, behalve de snijpunten met de assen.
Beschouw de parallellogrammen $OPRS$.
Teken de verzameling van de punten S.

B 4 Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is gegeven dat $AB = AT = 8$.
Het midden van de ribbe DT is punt P.
Op de ribbe BT ligt een punt Q zo dat $QT = 2$.

a Bereken de tangens van de hoek van de lijn PQ en het vlak ACT.

b Bij welke d bestaat er slechts één lijn door A die loodrecht staat op BT en die een afstand d heeft tot punt P?

c Een lijn snijdt de lijnen AT, BP en CQ opvolgend in de punten K, L en M zo dat M het midden is van het lijnstuk KL.
Construeer in een projectiefiguur van de piramide het punt M.
Geef een korte toelichting.

Boekbespreking

P.G. Scopes, *Mathematics in Secundary Schools* — A Teaching Approach, Cambridge University Press, London 1973, VIII + 179 blz., £ 2.50 (cloth), £ 1.10 (paper).

Het boek is in zeven delen verdeeld:
goals, onderwijsdoelen;
objectives, wat willen we de leerlingen bijbrengen? (skills, concepts, attitudes);
content, de inhoud van de cursus;
strategy, hoe gaan we te werk?;
method, methode van lesgeven;
materials, materiële hulpmiddelen;
evaluation, hebben we ons doel bereikt?
Interessant vond ik de nauwgezetheid waarmee de onderwijsdoelen geformuleerd zijn. Ze zijn vierledig:
Utilitarian. De staat steekt veel geld in het onderwijs en wenst in ruil economisch nut. Het onderwijs moet dus gericht zijn op de praktische behoeften van de maatschappij.
Social. De school moet bevorderen, dat de leerling in zijn latere leven goede sociale contacten kan leggen, zich in de maatschappij kan thuisvoelen.
Cultural. Ook de overdracht van cultuur is een essentieel onderwijsdoel.
Personal. De leerling wenst geschiktheden te verkrijgen die hem in staat stellen het leven te genieten, geld te verdienen, genoegen te vinden in een verscheidenheid van activiteiten.
De utilitarian goals zijn het duidelijkst en hebben daardoor vaak een te grote invloed op de gang van het onderwijs. Veel aanleren van mathematische technieken wordt erdoor gerechtvaardigd. Op het gebied van de social goals ligt het gebruik van wiskunde voor doelmatig ingrijpen op het terrein van menselijke omstandigheden en voor een juist begrip van natuurlijke fenomenen. De culturele doeleinden liggen op het gebied van het denken. Ze omvatten zowel inzicht in de logica als in structuren. De persoonlijke doelen liggen op het gebied van eigen activiteit, zelfontplooiing, succes en dergelijke.
Het zal de lezer niet verbazen, dat het hoofdstuk Content een uitvoerige weergave bevat van de methode van de S.M.P. en wel speciaal van de boeken 1-5, die voorbereiden voor het examen op O level. Daarnaast wordt gewag gemaakt van een methode op lager niveau, Making Mathematics, ontworpen door Paling, Banwell en Saunders.
In het hoofdstuk over strategy vindt men een grote hoeveelheid aardige opmerkingen en raadgevingen. Wie haast heeft leze de summary op bladzijde 106; daarvan kan men al veel opsteken.
Het dan volgende hoofdstuk over method is ietwat kaleidoskopisch en biedt niet veel nieuws. Aardiger is het hoofdstuk over materials waarin men een goed overzicht krijgt over de vele materiële hulpmiddelen die men bij het wiskunde-onderwijs kan gebruiken. Ten slotte een hoofdstuk over evaluatie, dat niet erg diepgaand is.
Al met al een goed boek waar ieder diverse dingen van zijn gading in zal kunnen vinden.

P.G.J. Vredenduin

Hugo Steinhaus, *100 neue Aufgaben,* Urania Verlag, Leipzig 1973, 170 blz., *f* 11,75.

De opgaven, puzzels zo men wil, zijn verdeeld in soorten, enigszins naar de aard van het vraagstuk. De oplossingen (123 blz.) zijn toegevoegd.
Voor puzzelaars niet onaardig.

W.A.M. Burgers

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

319. Verdeel een gesloten cirkelschijf in twee congruente delen. De bedoeling is natuurlijk niet een middellijn te trekken, want dan blijft de onoverkomelijke moeilijkheid de punten van deze middellijn zo over de beide delen te verdelen, dat ze congruent worden. Mijn dochter, die ik op deze moeilijkheid wees, zei: 'Knip hem dan door.' Maar mijn dochter studeert geen wiskunde en u heeft dit wel gedaan. Hoe zoudt u het doen?

320. Mannen zijn van mening, dat vrouwen vaak eindeloos lang kunnen praten. Zonder mij in een discussie hierover te wagen, zou ik de mannen willen verzoeken bijgaande puzzel op te lossen:

$$\frac{EVE}{DID} = 0, TALKTALKTALK\ldots$$

Voor de komma staat het cijfer nul. De breuk in het linkerlid is onvereenvoudigbaar. Gewoon recept: verschillende letters vervangen door verschillende cijfers. (meegedeeld door J. van Dormolen)

Oplossingen

317. Bewezen moest worden p is priem $\wedge$ $p^2 + 2$ is priem $\Rightarrow p^3 + 2$ is priem.
We onderscheiden de volgende gevallen:

$p = 3n$ ($n > 1$); dan is p niet priem
$p = 3n - 1$; dan is $p^2 + 2$ een drievoud en niet priem
$p = 3n + 1$; idem

In al deze gevallen is het linkerlid van de implicatie onjuist (en de implicatie dus juist).
Blijft over het enige interessante geval, waarin het linkerlid wel juist is, nl. $p = 3$. Dan is p priem, $p^2 + 2 = 11$ en dus eveneens priem. En omdat nu $p^3 + 2 = 29$ ook priem is, is de implicatie juist.

318. Zeven mannen moeten over een afstand van 700 meter 4 koffers dragen. Ieder draagt maximaal één koffer tegelijk. Maak een rooster zo, dat ieder over 400 meter een koffer draagt. Verder moet het aantal wisselingen minimaal zijn en mag ieder zijn koffer slechts aan zijn directe buurman afgeven.
Zonder beperking is de opgave heel eenvoudig. Op $\binom{7}{4} = 35$ manieren kunnen we uit de 7 mannen er 4 kiezen. Verdeel de weg in 35 gelijke delen en laat over elk wegdeel één van de mogelijke viertallen, die uit de 7 mannen gekozen kunnen worden, de koffers dragen. Het aantal wisselingen is nu minstens 34 (het is meer, als op sommige momenten twee personen tegelijk hun koffer aan een ander afgeven).

Het is in elk geval mogelijk een oplossing te construeren met 6 wisselingen. Verdeel de weg in 7 gelijke delen. Noem de mannen *A, B, C, D, E, F, G*. Het volgende schema voldoet:

A	*B*	*C*	*D*			
	B	*C*	*D*	*E*		
		C	*D*	*E*	*F*	
			D	*E*	*F*	*G*
A				*E*	*F*	*G*
A	*B*				*F*	*G*
A	*B*	*C*				*G*

In dit schema geeft, als de mannen in de volgorde *A, B, . . ., G* naast elkaar lopen, soms iemand een koffer aan iemand, die niet direct naast hem loopt. De wisselingen zijn resp. *A* geeft zijn koffer aan *E, B* aan *F, C* aan *G, D* aan *A, E* aan *B, F* aan *C*. Laat de mannen lopen in de volgorde

D A E B F C G.

Bij elke wisseling geeft dan iemand zijn koffer aan een directe buurman.
Een oplossing met minder dan 6 wisselingen is niet mogelijk. Het bewijs is wat langdradig; hier volgt een schets. Is het aantal wisselingèn minder dan 6, dan zal b.v. *A* een koffer de eerste 400 meter dragen en *F* en *G* de laatste 400 meter. Omdat er even veel koffers afgegeven als ontvangen worden, zal b.v. ook *B* de eerste 400 meter een koffer dragen. *C, D* en *E* zullen elk eenmaal een koffer afgeven en eenmaal een koffer ontvangen. Tussen 300 en 400 meter dragen ze echter geen van drieën een koffer. Hieruit volgt een contradictie.

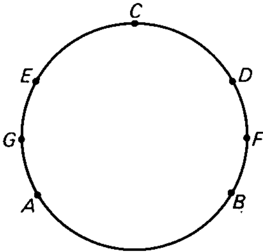


fig. 1

Oplossing van het kryptogram uit het vorige nummer

Horizontaal: 3 top; 8 analyse; 11 produits; 12 nim; 13 streep; 14 quotient; 16 Ohm; 18 ellips; 19 rekening; 20 GGD; 22 evenaar; 23 ca; 26 aas; 27 MI; 28 Da Ceva; 32 ad; 33 as; 34 naam; 35 oplossen; 36 ultimo; 38 deel; 40 rente; 44 bar; 45 oord; 47 benen; 48 decimalen; 51 lk; 52 oder; 53 tralie; 55 erg; 57 trui; 59 alle; 60 weg; 61 Koldijk; 62 MC.

Vertikaal: 1 X-as; 2 lijnenpaar; 3 tempo; 4 priem; 5 breuken; 6 edities; 7 lineair; 9 aftellen; 10 Sie; 15 tegenvoorbeeld; 17 heg; 20 gradenboog; 21 dus; 24 Amsterdam; 25 maat; 28 dal; 29 CMIX; 30 AP; 31 wortel; 32 as; 34 nul; 37 irreëel; 38 do; 39 edel; 41 een; 42 NN; 43 enkel; 45 orto; 46 vier; 49 CITO; 50 agio; 54 vak; 56 rem; 58 uk.

INHOUD